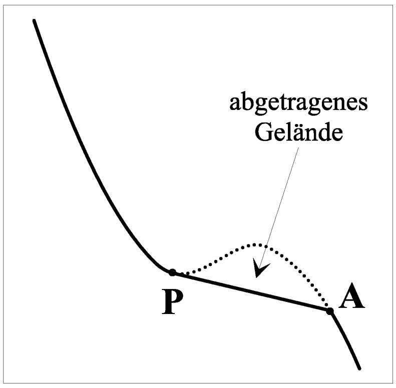

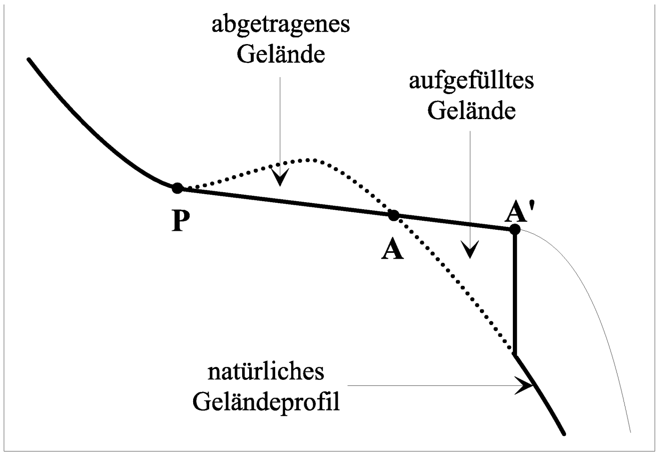

Aufgabe:

Ein Geländeprofil habe näherungsweise die Form einer Parabel 3. Ordnung. In einem kartesischen Koordinatensystem (mit einer nicht näher bestimmten Längeneinheit) habe diese Parabel einen Wendepunkt W(3|4), in dem die Steigung 25 % beträgt. Außerdem schneidet die Parabel die y-Achse bei dem Wert 16,75.

a) Bestimme die Gleichung der Parabel und fertige eine Skizze an.

b) Ab dem Punkt P, in dem das Gefälle erstmals 12,5 % beträgt, soll das Gelände abgetragen werden, so dass eine Sprungschanze entsteht. Das Profil der Schanze soll im Bereich des abgetragenen Geländes linear sein und nur im Absprungpunkt A einen Knick aufweisen (siehe obige Abbildung links). Wo liegt der Punkt A?

c) Wie viel Volumeneinheiten an Material muss abgetragen werden, wenn die Sprungschanze genau 4 LE breit sein soll?

d) Die Sprungschanze wird nun folgendermaßen modifiziert: Das komplette abgetragene Material wird wie oben rechts abgebildet zur Verlängerung des Schanzentisches verwendet. Welche Koordinaten hat der neue Absprungpunkt A'?

e) Der Flug eines faulen Skispringers, der am Schanzentisch nicht abspringt, soll durch folgende Sprungparabel dargestellt werden: Die *Formvariable* (Variable vor dem x^2) soll -5 sein, die Parabel soll durch Punkt A' gehen und dort die Steigung des Schanzentisches haben. Wo ist der Landungspunkt L, bei dem sich die Sprungparabel und das natürliche Gelände schneiden?

Vorgehensweise mit dem GTR:

a) Mit dem Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ erhält man aus der letzten Bedingung im Text, dass $d = 16,75$ gilt. Die weiteren Bedingungen führen zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcll} \text{I.} & f(3) = 4 & \iff & 27a + 9b + 3c + 16,75 = 4 \\ \text{II.} & f''(3) = 0 & \iff & 18a + 2b & = 0 \\ \text{III.} & f'(3) = 0,25 & \iff & 27a + 6b + c & = 0{,}25 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann man mit **MATRIX→EDIT** als 3×4-Matrix eingeben und (nach dem Verlassen des Matrix-Menüs mit **QUIT**) mit **MATRIX→MATH→rref** und **MATRIX→NAMES** auf Diagonalform bringen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & -12,75 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0,25 \end{array}\right] \xrightarrow{\textbf{rref}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 4,5 \\ 0 & 0 & 1 & -13,25 \end{array}\right]$$

Als darzustellenden Bereich kann man im **WINDOW**-Menü z.B. $0 \leq x \leq 7$ und $0 \leq y \leq 5$ wählen.

b)
- Um die x-Koordinate des Punktes P zu berechnen, muss die Gleichung $f'(x) = -0,125$ gelöst werden. Dies ist eine quadratische Gleichung und lässt sich problemlos ohne GTR nach x auflösen.
  GTR-Alternative:
  Man kann die Nullstellen des Graphen $Y_3 = nDeriv(Y_1, X, X) + 0,125$ berechnen lassen. (*nDeriv* berechnet die numerische Ableitung der Funktion Y_1 nach der Variablen X an der Stelle X.)
- Den y-Wert des Punktes P erhält man mit dem **TRACE**-Menü nach der Eingabe des x-Wertes. Der Schanzentisch ist die Tangente an das Schaubild von f im Punkt P. Die Gleichung der Tangenten kann einfach mit der Punkt-Steigungs-Formel bestimmt werden.
  Oder:
  Mittels **DRAW→Tangent** und der Eingabe des x-Wertes von P die Tangente darstellen lassen und die Werte ablesen.
- Der Punkt A ist der Schnittpunkt der Tangenten und des Schaubildes. Zur Berechnung des x-Wertes von A verwendet man **CALC→intersect**, wählt die beiden zu schneidenden Schaubilder aus (mit ↑ und ↓ können die Funktionen gewechselt werden) und bringt den Cursor nach der Aufforderung *Guess?* (Tipp) in die Nähe des gesuchten Schnittpunktes.

c)
- Das Volumen ist der Inhalt der von Schaubild und Tangente eingeschlossenen Fläche multipliziert mit der Breite 4 LE. Zur Vorgehensweise bei der Berechnung einer von zwei Schaubildern eingeschlossenen Fläche siehe GTR-Übungsaufgabe I.
- Die Darstellung eines Ergbnisses als Bruch bekommt man durch **MATH→ ▷Frac**.

d) Bezeichnet man die Funktion der Tangenten mit t und die in Teil c) berechnete Fläche mit F, so muss

$$\int_{x_A}^{u} (t(x) - f(x))\ dx = F$$

gelten. Am besten bildet man die Stammfunktion von Hand und erhält eine Gleichung 4. Grades mit der Variablen u, deren größte Lösung der x-Wert des Punktes A' ist.
Zum Lösen dieser Gleichung kann man den Solver des GTR benutzen: Unter **MATH→Solver** steht in der ersten Zeile die Gleichung. Durch Drücken von **ENTER** auf dieser Zeile kann diese editiert werden (Die Variable muss jetzt X sein!). In der zweiten Zeile steht zunächst der Startwert für den Lösungsalgorithmus. Dieser sollte in der Nähe der vermuteten gesuchten Lösung sein (wichtig, falls es mehrere Lösungen gibt). Die dritte Zeile kann i.d.R. unverändert bleiben. Der Löser wird mit dem Cursor auf der zweiten Zeile gestartet durch **SOLVE** (durch Drücken der Tasten **ALPHA→ENTER**). Die gefundene Lösung steht dann in der zweiten Zeile. Zusätzlich wird der Wert der linken Seite an dieser Stelle angegeben (sollte fast Null sein).
GTR-Alternative ohne Bestimmung der Stammfunktion:
Ist in Y_1 der Funktionsterm von f und in Y_2 der Term der Tangenten gespeichert, so kann mit dem Solver auch direkt die Gleichung

$$0 = fnInt(Y_2 - Y_1, X, 4, X) - Fl\ddot{a}cheninhalt$$

gelöst werden. Weil dabei aber bei jedem Iterationsschritt ein Integral berechnet werden muss, dauert die Berechnung deutlich länger.

e)
- Aufstellen der Sprungparabel mit gegebener Formvariablen mit den Bedingungen, dass A' auf der Parabel liegt und diese in A' die Steigung -0,125 besitzt.
- Berechnung des Schnittpunktes durch **CALC→intersect**.
  Achtung: Nur einer der beiden Schnittpunkte ist der Landungspunkt L.

Lösungen

a)	Gleichung des Geländes:	$f(x) = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 13,25x + 16,75$
b)	Koordinaten von P:	P$(\frac{5}{2} \mid \frac{63}{16})$
	Gleichung der Tangenten:	$y = -\frac{1}{8}x + \frac{17}{4}$
	Absprungpunkt:	A$(4 \mid \frac{15}{4})$
c)	Fläche:	$F = \frac{27}{128}$ FE
	abgetragenes Volumen:	$V = \frac{27}{32}$ VE
d)	Zu lösende Gleichung:	$0 = \frac{1}{8}u^4 - \frac{3}{2}u^3 + \frac{105}{16}u^2 - \frac{25}{2}u + \frac{1125}{128}$
	neuer Absprungpunkt:	A'$(\frac{9}{2} \mid \frac{59}{16})$
e)	Gleichung der Sprungparabel:	$y = -5x^2 + \frac{359}{8}x - 97$
	Landungspunkt:	L$(6,5 \mid -\frac{265}{16})$