Aufgabe 1:
Das zur y-Achse symmetrische Schaubild einer ganzrationalen Funktion 6. Grades hat an der Stelle $x_1 = -1$ einen Wendepunkt, dessen Wendetangente parallel ist zur Geraden $y = -36x$. Außerdem hat das Schaubild im Punkt E(2 | 20) einen Extrempunkt. Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe 2:
Katja kauft 3 Liter H-Milch, 2 Liter Vollmilch und 4 Liter Apfelsaft. Sie bezahlt mit einem 10 €-Schein und bekommt 51 Cent zurück. Ralf kauft 2 Liter Vollmilch, 5 Liter H-Milch und 5 Liter Apfelsaft. Er gibt dem Kassierer 15 € und bekommt 2,61 € zurück. Tillmann bezahlt 6 Liter Apfelsaft, 2 Liter Vollmilch und 8 Liter H-Milch mit einem 20 €-Schein und bekommt 3,92 € zurück. Überlege Dir dazu eine sinnvolle Frage und beantworte sie.

Aufgabe 3:
Nikolas hat auf seinen drei Sparbüchern insgesamt 4500 €. Das erste ist zu 6%, das zweite zu 5% und das dritte zu 3% angelegt. Nikolas erhält in einem Jahr 192,50 € Zinsen. Wäre das erste allerdings zu 3% und stattdessen das dritte zu 6% angelegt, so würde Nikolas 227 € Zinsen erhalten. Welche Beträge sind (jetzt) auf den einzelnen Sparbüchern?

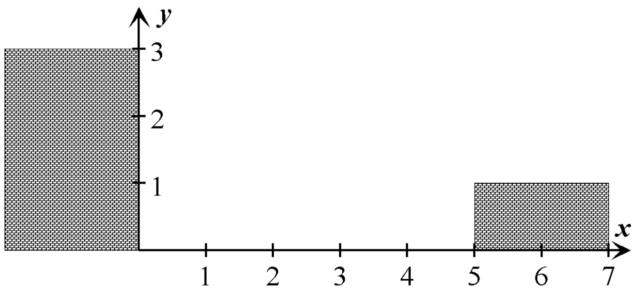
Aufgabe 4:
Gesucht ist ein Dreieck, bei dem die Winkelweiten α, β und γ der Innenwinkel folgende Bedingungen erfüllen: β ist das arithmetische Mittel (also der Mittelwert) von α und γ. Der Unterschied zwischen α und β ist so groß wie der Unterschied von γ und 90°.
(Hinweis: Für die letzte Gleichung gibt es mehrere Möglichkeiten!)

Aufgabe 5:
Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & ax - y + 3z = -2 \\ \text{II} & 5x + y - az = 1 \\ \text{III} & x - 4y + 11z = 0 \end{array}$$

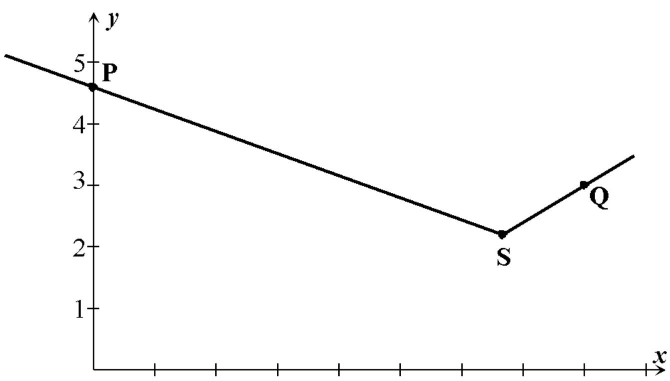
genau eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 6:
Zwei horizontale Flächen sollen so durch eine Metallschiene verbunden werden, dass die Schniene ohne Knick und Absatz in den Punkten A(0 | 3) und B(5|1) in die Flächen „einmündet“. Die Schiene soll durch eine ganzrationale Funktion mit möglichst kleinem Grad beschrieben werden.



a) Wieso verwendet man dazu eine ganzrationale Funktion 3. Grades?
b) Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen der Schiene und der x-Achse?
(c) Berechne mit dem GTR die genaue Länge der Schiene.

Aufgabe 7:
Nebenstehende Abbildung zeigt zwei Wege, die sich im Koordinatenpunkt S($\frac{20}{3}$| 2, 2) schneiden. Vom Punkt P(0 | 4, 6) bis zum Punkt Q(8 | 3) soll eine Kurve gebaut werden, die ohne Knick in die beiden Wege einmündet. Die Kurve soll durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden.



a) Welche Steigungen haben die beiden Geraden?.
b) Bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion.

Aufgabe 1:
Aufgrund der Symmetrie-Information wählt man als Ansatz: $f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$.
Die vier benötigten Gleichungen erhält man aus den Informationen:
$f''(-1) = 0$; $f'(-1) = -36$; $f(2) = 20$ und $f'(2) = 0$.
Das Ergebnis lautet: $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{11}{2}x^4 + 28x^2 - \frac{76}{3}$.

Aufgabe 2:
Beim Aufstellen der Gleichungen ist darauf zu achten, dass die verschiedenen Getränke im Text in unterschiedlichen Reihenfolgen vorkommen.
Mögliche Fragen für Grundschüler könnten lauten: „Wer bezahlt am meisten?“ Oder: „Wer muss am meisten schleppen?“
Welche Frage Du auch immer gewählt hast, ein Liter Vollmilch kostet jedenfalls 92 ct, ein Liter H-Milch 79 ct und ein Liter Apfelsaft 1,32 €.

Aufgabe 3:
Zu beachten ist, dass bei der dritten Gleichung der Zinssatz des zweiten Sparbuchs genau so groß ist wie bei der zweiten Gleichung. Die dritte Gleichung könnte also z.B. lauten:
III $0,03a + 0,05b + 0,06c = 227$
Die Beträge sind: 950 €, 1450 € und 2100 €.

Aufgabe 4:
Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \text{(Winkelsummensatz)} \\ \text{II} & -\frac{1}{2}\alpha + \beta - \frac{1}{2}\gamma = 0° \\ \text{III} & \alpha - \beta + \gamma = 90° \end{array}$$

hat keine Lösung. Ändert man die dritte Gleichung in III $-\alpha + \beta + \gamma = 90°$,
so erhält man $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ und $\gamma = 75°$.

Aufgabe 5:
Man löst das Gleichungssystem von Hand mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Am besten eliminiert man zunächst die Variable y. An der Stelle, an der man durch einen von a abhängigen Ausdruck teilen will, macht man eine Fallunterscheidung.
Ergebnis: Für $a \in \{1; 2\}$ gibt es keine Lösung. Für alle anderen Werte gibt es genau eine Lösung.

Aufgabe 6:

a) Die Funktion muss die vier Bedingungen $f(0) = 3$, $f'(0) = 0$, $f(5) = 1$, und $f'(5) = 0$ erfüllen. Wegen der vier Bedingungen (von den keine aus den anderen resultiert) sind auch vier Variablen nötig. Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat vier Koeffizienten.

b) Aus Symmetriegründen muss der Wendepunkt in $W(2,5 \mid 2)$ liegen. Der Mittelwert der Schienenhöhe beträgt also 2. Die Fläche hat also einen Inhalt von 10 FE.
Oder rechnerisch (aus den oben genannten Bedingungen): Die Schiene liegt auf dem Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 0,032x^3 - 0,24x^2 + 3$.
Es gilt $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$. Der Flächeninhalt beträgt also 10 FE

(c) Kurvenintegral $\int_0^5 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \approx 5,451$. Die Schiene ist also ca. 5,45 LE lang.
Berechnet man mit dem GTR das Kurvenintegral der Funktion $\mathtt{Y_1}$ durch die neue Funktion mit dem Term $\sqrt{}$`(1+(nDeriv(Y1,X,X))2)`, so dauert das Darstellen der neuen Funktion sehr lange. Schneller (und genauer) geht es, wenn der Term der Ableitung von f verwendet wird, also durch Berechnung des Integrals der Funktion `Y2=`$\sqrt{}$`(1+(.096*X2-.48*X)2)`.

Aufgabe 7:

a) Steigungen der beiden Geraden: $m_1 = \dfrac{2,2 - 4,6}{\frac{20}{3} - 0} = -0,36$ und $m_2 = \dfrac{3 - 2,2}{8 - \frac{20}{3}} = 0,6$

b) Die vier Bedingungen sind $f(0) = 4,6$, $f'(0) = -0,36$, $f(8) = 3$ und $f'(8) = 0,6$.
Daraus ergibt sich $f(x) = 0,01x^3 - 0,06x^2 - 0,36x + 4,6$.