Mit dem Programm *Zerlegungssummen* von R. Schwörer kann man unterschiedliche Zerlegungssummen für eine Funktion f über dem Intervall $[a; b]$ berechnen lassen.

Einzugeben sind der Funktionsterm $f(x)$, die Intervallgrenzen a und b sowie die Anzahl der Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$.

Das Programm führt folgende Berechnungen durch:

$$S_n = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \ldots + h \cdot f(x_n)$$

Obersumme Auf jedem Teilintervall wird der größte Funktionswert genommen.

Untersumme Auf jedem Teilintervall wird der kleinste Funktionswert genommen.

Intervallmitten Auf jedem Teilintervall wird der Funktionswert der Intervallmitte genommen.

Zufallsstellen Auf jedem Teilintervall wird der Funktionswert einer zufällig gewählten Stelle des Intervalls genommen.

Aufgabe 1:
Überprüfe die Ergebnisse der letzten Stunde für $f(x) = 4 - x^2$ und $[a; b] = [0; 2]$ mit $n = 4$:
$O_4 =$ ☐ $U_4 =$ ☐

Erhöhe in mehreren Schritten die Intervallzahl n und lasse jeweils die unterschiedlichen Zerlegungssummen berechnen. (Wähle z.B. $n = 10;\ 50;\ 100;\ 1\,000;\ 10\,000;\ 100\,000$)
Vervollständige den Satz:

Je größer n gewählt wird, desto

Für jedes n gilt: $U_n < A_0(2) < O_n$.
Also kann man für $f(x) = 4 - x^2$ und sehr große n vermuten, dass $A_0(2) =$ ☐.

Aufgabe 2:
Kontrolliere die Ergebnisse der 2. Hausaufgabe S. 77 Nr 3:

a) Für $f(x) = 0,25x^2 + 2$ und $[a; b] = [0; 4]$ gilt $O_8 =$ ☐ und $U_8 =$ ☐.

b) Für $f(x) = -0,5x^2 + 5$ und $[a; b] = [1; 3]$ gilt $O_8 =$ ☐ und $U_8 =$ ☐.

Aufgabe 3:
Auf dem Arbeitsblatt „Näherungsweise Berechnung von Flächeninhalten“ haben wir in der letzten Stunde Vermutungen für die exakten Werte der Flächeninhalte aufgestellt. Diese Vermutungen sollen mit Zerlegungssummen für $n = 1\,000$ verglichen werden.

$f(x)$	$[a; b]$	$A_0(x)$	$A_a(b) = A_0(b) - A_0(a)$	$O_{1\,000}$	$U_{1\,000}$	$S^m_{1\,000}$
x^2	$[1; 3]$	$\frac{1}{3}x^3$	$A_1(3) = A_0(3) - A_0(1) = 8\frac{2}{3}$			
$2 - 2x^2$	$[0; 1]$	$2x - \frac{2}{3}x^3$	$A_0(1) = 1\frac{1}{3}$			

Aufgabe 4:
Vergleiche die Ergebnisse aus der 1. Hausaufgabe mit den Zerlegungssummen für $n = 10\,000$.

$f(x)$	$[a; b]$	$A_0(x)$	$A_a(b) = A_0(b) - A_0(a)$	$O_{10\,000}$	$U_{10\,000}$	$S^m_{10\,000}$
$\frac{1}{x^2}$	$[0,5; 10]$		$A_{0,5}(10) =$			
$x^3 + 1$	$[-1; 1]$		$A_{-1}(1) =$			

Aufgabe 5: Vervollständige die Tabelle. Eingabe von $\sqrt{x}$ durch `sqrt(x)`

$f(x)$	$[a; b]$	$A_0(x)$	$A_a(b) = A_0(b) - A_0(a)$	$O_{10\,000}$	$U_{10\,000}$	$S^m_{10\,000}$
$-x^4 + 2x$	$[0,2; 1]$		$A_{0,2}(1) =$			
$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$	$[0,1; 1]$		$A_{0,1}(1) =$			

Mit dem Programm *Zerlegungssummen* von R. Schwörer kann man unterschiedliche Zerlegungssummen für eine Funktion f über dem Intervall $[a; b]$ berechnen lassen.

Einzugeben sind der Funktionsterm $f(x)$, die Intervallgrenzen a und b sowie die Anzahl der Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$.

Das Programm führt folgende Berechnungen durch:

$$S_n = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \ldots + h \cdot f(x_n)$$

Obersumme Auf jedem Teilintervall wird der größte Funktionswert genommen.

Untersumme Auf jedem Teilintervall wird der kleinste Funktionswert genommen.

Intervallmitten Auf jedem Teilintervall wird der Funktionswert der Intervallmitte genommen.

Zufallsstellen Auf jedem Teilintervall wird der Funktionswert einer zufällig gewählten Stelle des Intervalls genommen.

Aufgabe 1:
Überprüfe die Ergebnisse der letzten Stunde für $f(x) = 4 - x^2$ und $[a; b] = [0; 2]$ mit $n = 4$:
$O_4 =$ 6,25 $U_4 =$ 4,25

Erhöhe in mehreren Schritten die Intervallzahl n und lasse jeweils die unterschiedlichen Zerlegungssummen berechnen. (Wähle z.B. $n = 10;\ 50;\ 100;\ 1\,000;\ 10\,000;\ 100\,000$)
Vervollständige den Satz:

Je größer n gewählt wird, desto näher liegen die unterschiedlichen Zerlegungssummen beieinander.

Für jedes n gilt: $U_n < A_0(2) < O_n$.
Also kann man für $f(x) = 4 - x^2$ und sehr große n vermuten, dass $A_0(2) = 5\frac{1}{3}$.

Aufgabe 2:
Kontrolliere die Ergebnisse der 2. Hausaufgabe S. 77 Nr 3:

a) Für $f(x) = 0,25x^2 + 2$ und $[a; b] = [0; 4]$ gilt $O_8 =$ 14,375 und $U_8 =$ 12,375.

b) Für $f(x) = -0,5x^2 + 5$ und $[a; b] = [1; 3]$ gilt $O_8 =$ 6,15625 und $U_8 =$ 5,15625.

Aufgabe 3:
Auf dem Arbeitsblatt „Näherungsweise Berechnung von Flächeninhalten“ haben wir in der letzten Stunde Vermutungen für die exakten Werte der Flächeninhalte aufgestellt. Diese Vermutungen sollen mit Zerlegungssummen für $n = 1\,000$ verglichen werden.

$f(x)$	$[a; b]$	$A_0(x)$	$A_a(b) = A_0(b) - A_0(a)$	$O_{1\,000}$	$U_{1\,000}$	$S^m_{1\,000}$
x^2	$[1; 3]$	$\frac{1}{3}x^3$	$A_1(3) = A_0(3) - A_0(1) = 8\frac{2}{3}$	8,674668	8,658668	8,666666
$2 - 2x^2$	$[0; 1]$	$2x - \frac{2}{3}x^3$	$A_0(1) = 1\frac{1}{3}$	1,334333	1,332333	1,3333335

Aufgabe 4:
Vergleiche die Ergebnisse aus der 1. Hausaufgabe mit den Zerlegungssummen für $n = 10\,000$.

$f(x)$	$[a; b]$	$A_0(x)$	$A_a(b) = A_0(b) - A_0(a)$	$O_{10\,000}$	$U_{10\,000}$	$S^m_{10\,000}$
$\frac{1}{x^2}$	$[0,5; 10]$	$-\frac{1}{x}$	$A_{0,5}(10) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{0,5} = 1,9$	1,901896	1,898106	1,899999
$x^3 + 1$	$[-1; 1]$	$\frac{1}{4}x^4 + x$	$A_{-1}(1) = \frac{1}{4} + 1 - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 2$	2,0002	1,9998	2

Aufgabe 5: Vervollständige die Tabelle. Eingabe von $\sqrt{x}$ durch `sqrt(x)`

$f(x)$	$[a; b]$	$A_0(x)$	$A_a(b) = A_0(b) - A_0(a)$	$O_{10\,000}$	$U_{10\,000}$	$S^m_{10\,000}$
$-x^4 + 2x$	$[0,2; 1]$	$-\frac{1}{5}x^5 + x^2$	$A_{0,2}(1) = 0,760064$	0,760103	0,760025	0,760064
$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$	$[0,1; 1]$	$\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$	$A_{0,1}(1) = 0,233772$	0,233821	0,233724	0,233772