Aufgabe 1:

$$e^{0,5x} - \frac{2}{e^{0,5x}} = 1 \qquad | \text{ Substitution: } u = e^{0,5x}$$

$$u - \frac{2}{u} = 1 \qquad | \cdot u$$

$$u^2 - 2 = u \qquad | - u$$

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$u_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

$$u_1 = 2 \qquad | \text{ Rücksubst.} \qquad\qquad u_2 = -1 \qquad | \text{ Rücksubst.}$$

$$e^{0,5x_1} = 2 \qquad | \ln \qquad\qquad e^{0,5x_2} = -1 \qquad | \ln$$

$$0,5x_1 = \ln(2) \qquad | \cdot 2 \qquad\qquad 0,5x_2 = \ln(-1) \notin \mathbb{R}$$

$$x_1 = 2\ln(2) = \ln(4)$$

Die einzige Lösung ist $x_1 = \ln(4)$.

Aufgabe 2:

$(e^x - 2) \cdot (\sin(2x) + 1) = 0$ Ein Produkt ist Null wenn einer der Faktoren Null ist!

A) $e^x - 2 = 0 \qquad | + 2$

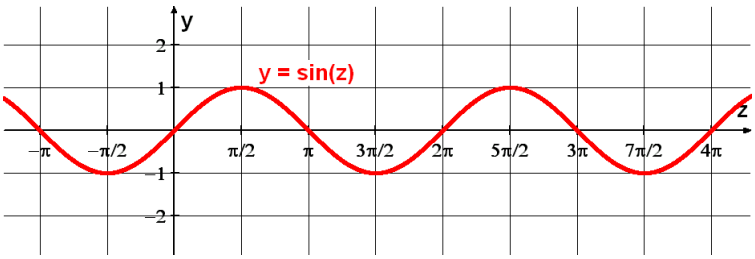
$e^x = 2 \qquad | \ln$

$x = \ln(2)$

B) $\sin(2x) + 1 = 0 \qquad | - 1$

$\sin(2x) = -1 \qquad |$ Substitution: $z = 2x$

$\sin(z) = -1$



also gilt $z = -\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3\pi}{2}$ bzw. $\frac{7\pi}{2}$ bzw. ... | Rücksubst.

$2x = -\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3\pi}{2}$ bzw. $\frac{7\pi}{2}$ bzw. ... | : 2

$x = -\frac{\pi}{4}$ bzw. $\frac{3\pi}{4} (\approx 2,356)$ bzw. $\frac{7\pi}{4} (\approx 5,498)$ bzw. ...

Die Lösungen auf dem Intervall $[0; 3]$ sind also $x_1 = \ln(2)$ und $x_2 = \frac{3}{4}\pi$.

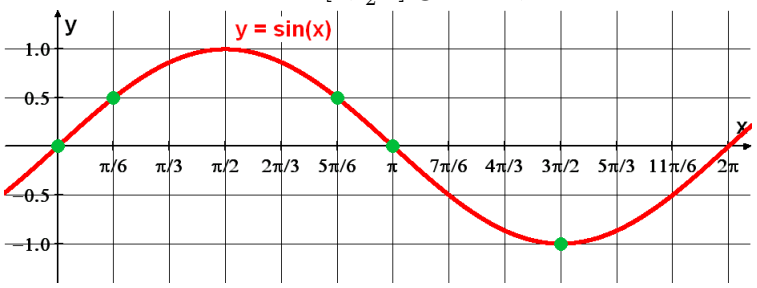
Aufgabe 3:

$$2\,(\sin(x))^3 + (\sin(x))^2 - \sin(x) = 0 \qquad | \text{ Substitution: } u = \sin(x)$$

$$2u^3 + u^2 - u = 0 \qquad | \text{ Ausklammern}$$

$$
\begin{aligned}
u \cdot (2u^2 + u - 1) &= 0 \\
u_1 &= 0 \\
\text{oder} \qquad 2u^2 + u - 1 &= 0 \qquad\qquad | : 2 \\
u^2 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2} &= 0 \\
u_{2/3} &= -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}} \\
&= -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{8}{16}} = -\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{3}{4} \\
u_2 &= \tfrac{1}{2} \\
u_3 &= -1
\end{aligned}
$$

Wegen $u = \sin(x)$ werden die x-Werte aus $[0; \frac{3}{2}\pi]$ gesucht, für die der Sinus 0, $\frac{1}{2}$ oder -1 ist.



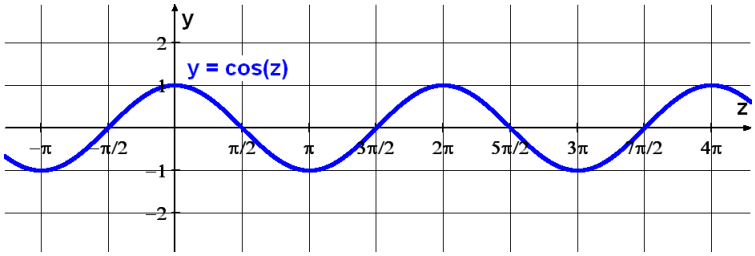
Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L} = \{0;\ \frac{1}{6}\pi;\ \frac{5}{6}\pi;\ \pi;\ \frac{3}{2}\pi\}$.

Aufgabe 4:

$$
\begin{aligned}
(\cos(\pi x))^2 - 2\cos(\pi x) - 3 &= 0 \qquad\qquad | \text{ Substitution: } u = \cos(\pi x) \\
u^2 - 2u - 3 &= 0 \\
u_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \\
u_1 &= 3 \\
u_2 &= -1
\end{aligned}
$$

Weil $u = \cos(\pi x)$ gilt, liefert $u_1 = 3$ keine Lösungen. Gesucht sind also die Lösungen von

$$
\begin{aligned}
\cos(\pi x) &= -1 \qquad\qquad | \text{ Substitution: } z = \pi x \\
\cos(z) &= -1
\end{aligned}
$$



Man liest ab:

$$
\begin{aligned}
z_k &= \pi + k \cdot 2\pi \qquad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \qquad | \text{ Rücksubstitution} \\
\pi x_k &= \pi + k \cdot 2\pi \qquad\qquad | : \pi \\
x_k &= 1 + k \cdot 2
\end{aligned}
$$

Die Lösungen sind also $x_k = 1 + 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also alle ungeraden ganzen Zahlen.

Dies würde man auch sehen, wenn man das Schaubild $x = \cos(\pi x)$ skizzieren würde.