Aufgabe 1:
Es handelt sich hier um exponentiellen Zerfall. Also verwendet man den Ansatz $m_1(t) = a \cdot e^{k_1 \cdot t}$.
Die Gleichungen $m_1(0) = 80$ und $m_1(21) = 10$ liefern das Zerfallsgesetz
$m_1(t) = 80 \cdot e^{k_1 \cdot t}$ mit $k_1 = \frac{1}{21} \ln \frac{1}{8} \approx -0,099$ (wobei die Masse in mg angegeben ist).
Die Halbwertszeit beträgt genau _ Tage.
Für die Wachstumskonstante der zweiten Substanz gilt $k_2 = \frac{1}{14} \ln \frac{1}{2} \approx -0,0495$.
Die Zeit, bei der die Massen gleich sind, erhält man durch Lösen der Gleichung $80 \cdot e^{k_1 \cdot t} = 60 \cdot e^{k_2 \cdot t}$.
Ergebnis: Nach $t = \ln \frac{4}{3} / (k_2 - k_1) \approx 5,8$ Tagen sind von beiden Substanzen noch genau 45 mg nicht zerfallen.

Aufgabe 2:

a) Aus den Bedingungen $f(0) = 33$ und $f(2) = 35,5$ erhält man zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und c, die man z.B. mit dem Einsetzungsverfahren berechnen kann.
Ergebnis: $a \approx$ ___ und $c \approx$ ___

b) Für $t \to \infty$ strebt der Exponentialterm gegen Null.
Die Grenztemperatur beträgt also ___ °C. Dies ist die Temperatur des Badewassers.

c) <u>1. Kriterium:</u> Der Unterschied zwischen zwei Messwerten (im Abstand von einer Sekunde) ist kleiner als ein fester Wert d. Dieser beträgt für dieses Beispiel
$d = |f(25) - f(24)| \approx 0,0106$.
<u>2. Kriterium:</u> Der Betrag der Ableitung der Funktion ist kleiner als ein fester Wert g. Dieser beträgt für dieses Beispiel $g = f'(25) \approx 0,00976$.

Aufgabe 3:

a) Es ist von beschränktem Wachstum auszugehen, also gilt $h(t) =$ _____.
Aus den beiden Gleichungen $h(0) = 2,75$ und $h(1) = 2,75 \cdot 1,021$ erhält man die Unbekannten a und k.
Ergebnis: $h(t) =$ _____

b) 2010: $h(20) \approx$ ___; 2030: $h(40) \approx$ ___.
Prozentuale Zunahme zwischen 2000 und 2010: $\frac{h(20)-h(10)}{h(10)} \approx$ ___%.

Aufgabe 4:

a) Aus $a = 20$ und $f(0) = 100$ folgt: $f(t) =$ _____.

b) In dem Monat nach dem Zeitpunkt t vergisst er $f(t) - f(t+1)$ Prozent des Examensstoffes. Vergessen kann er zu diesem Zeitpunkt noch $f(t) - 20\%$, da er ja die 20% nie vergisst. Der Anteil ist also $\frac{f(t)-f(t+1)}{f(t)-20} =$ __%. (durch Einsetzen, Ausklammern und Kürzen)

c) $f(12) \approx$ ___. Nach einem Jahr hat er also noch ___% des Stoffes im Gedächtnis.

d) $f(t) = 75$ aufgelöst nach t: Nach ca. ___ Monaten weiß der Student noch 75% des Stoffes.

Aufgabe 5:

a) Aus der Anfangsbedingung $L(0) = 0$ folgt $a =$ __ und damit erhält man aus der Gleichung $L(15) = 15$ die Wachstumskonstante $k =$ ___ $\approx$ ___.
Für die 42 Vokabeln benötigt er also ca. __ Minuten.

b) Nach 30 Minuten weiß er 25 Vokabeln (natürlich abgerundet), nach der Pause also noch __ Vokabeln. Es fehlen ihm also noch __ Vokabeln, für die er nochmals ___ Minuten braucht. Insgesamt benötigt er für alle Vokabeln also mit weniger als __ Minuten deutlich weniger Lernzeit als ohne Pause!

Aufgabe 6:

a) Ansatz: $f(x) = S + a \cdot e^{-k \cdot x}$. Grenzwert $S =$ __, also folgt aus $f(0) = 165$: $a =$ ___.
Die Bedingung $f(1) = 100$ liefert dann $k =$ _____ $\approx$ _____. Ergebnis:
$f(x) =$ _____

b) Bedingung: $82,5 =$ _____. Ergebnis: $x =$ _____ $\approx$ ____, es dauert also ca. ____ Minuten.

c) Berechnet man $f(40) - f(50)$ direkt mit dem Taschenrechner, so erhält man das falsche Ergebnis 0 („*Subtraktionskatastrophe*“). Vereinfacht man den Term aber (55 fällt weg), so erhält man als Unterschied _____ kcal/min.

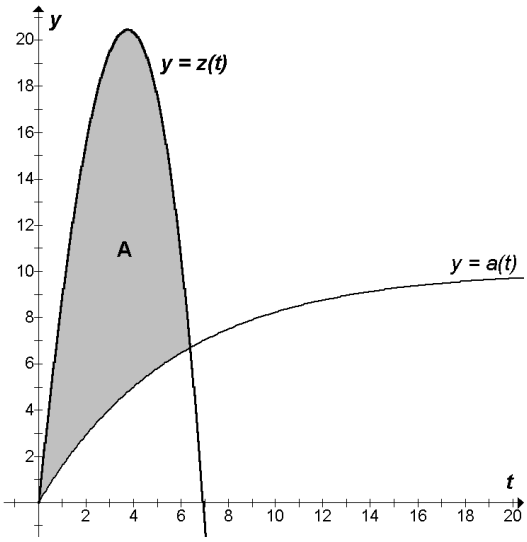
Aufgabe 7:

a) Es hört auf zu schneien wenn die Zunahme Null ist.
Gesucht ist also die Nullstelle der Funktion z.
GTR: Calc→Zero: $t_1 \approx$ ____
Nach ca. _ Tagen hört es auf zu schneien.
Um die gesamte geschneite Schneehöhe zu bestimmen, muss man die Zunahmefunktion integrieren:

GTR: $S_1 =$

_____

Es hat insgesamt also ca. ____ cm geschneit.



b) Ansatz: $a(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot x}$.
Grenzwert $S =$ __, also folgt aus $a(0) =$ _: $c =$ __.
Die Bedingung $a($_$) =$ _ liefert dann $k =$ _____.
Ergebnis: $a(t) =$ _____ mit $k \approx$ _____.

c) Ab dem Schnittpunkt der beiden Schaubilder ist die Abnahme größer als die Zunahme. Bis zu diesem Zeitpunkt steigt die Schneehöhe, danach fällt sie. Die Fläche unter der Funktion z ist die geschneite Schneehöhe, die Fläche unter der Funktion a gibt die zurückgegangene Schneehöhe an. Der Inhalt der Fläche A entspricht also der maximalen Schneehöhe. Ihr Wert (67 cm) braucht nicht berechnet zu werden.

GTR:

_____

Wenn es aufhört zu schneien (zum Zeitpunkt t_1) liegt ca. ____ cm Schnee.

Es liegt kein Schnee mehr, wenn genau so viel weggetaut ist wie es geschneit hat. Es muss also folgende Gleichung nach x aufgelöst werden:

$$\int_0^x a(t)\,dt = S_1$$

$$\int_0^x (\underline{\qquad\qquad})dt = S_1$$

$$\Big[\underline{\qquad\qquad}\Big]_0^x = S_1$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} = S_1$$

Diese Gleichung kann man mit dem GTR-Solver lösen oder indem man die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) =$ _____ (mit den oben angegebenen Parametern k und S_1, die man am besten im Rechner speichert) berechnet. Ergebnis: $x \approx$ _____
Nach ca. ____ Tagen liegt kein Schnee mehr.

Aufgabe 1:
Es handelt sich hier um exponentiellen Zerfall. Also verwendet man den Ansatz $m_1(t) = a \cdot e^{k_1 \cdot t}$.
Die Gleichungen $m_1(0) = 80$ und $m_1(21) = 10$ liefern das Zerfallsgesetz
$m_1(t) = 80 \cdot e^{k_1 \cdot t}$ mit $k_1 = \frac{1}{21} \ln \frac{1}{8} \approx -0,099$ (wobei die Masse in mg angegeben ist).
Die Halbwertszeit beträgt genau 7 Tage.
Für die Wachstumskonstante der zweiten Substanz gilt $k_2 = \frac{1}{14} \ln \frac{1}{2} \approx -0,0495$.
Die Zeit, bei der die Massen gleich sind, erhält man durch Lösen der Gleichung $80 \cdot e^{k_1 \cdot t} = 60 \cdot e^{k_2 \cdot t}$.
Ergebnis: Nach $t = \ln \frac{4}{3} / (k_2 - k_1) \approx 5,8$ Tagen sind von beiden Substanzen noch genau 45 mg nicht zerfallen.

Aufgabe 2:

a) Aus den Bedingungen $f(0) = 33$ und $f(2) = 35,5$ erhält man zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und c, die man z.B. mit dem Einsetzungsverfahren berechnen kann.
Ergebnis: $a \approx 7,5$ und $c \approx 40,5$

b) Für $t \to \infty$ strebt der Exponentialterm gegen Null.
Die Grenztemperatur beträgt also $40,5$°C. Dies ist die Temperatur des Badewassers.

c) <u>1. Kriterium:</u> Der Unterschied zwischen zwei Messwerten (im Abstand von einer Sekunde) ist kleiner als ein fester Wert d. Dieser beträgt für dieses Beispiel
$d = |f(25) - f(24)| \approx 0,0106$.
<u>2. Kriterium:</u> Der Betrag der Ableitung der Funktion ist kleiner als ein fester Wert g. Dieser beträgt für dieses Beispiel $g = f'(25) \approx 0,00976$.

Aufgabe 3:

a) Es ist von beschränktem Wachstum auszugehen, also gilt $h(t) = 4,17 - a \cdot e^{-k \cdot t}$.
Aus den beiden Gleichungen $h(0) = 2,75$ und $h(1) = 2,75 \cdot 1,021$ erhält man die Unbekannten a und k.
Ergebnis: $h(t) = 4,17 - 1,42 \cdot e^{-0,04152 \cdot t}$

b) 2010: $h(20) \approx 3,55$; 2030: $h(40) \approx 3,90$.
Prozentuale Zunahme zwischen 2000 und 2010: $\frac{h(20)-h(10)}{h(10)} \approx 9,85\%$.

Aufgabe 4:

a) Aus $a = 20$ und $f(0) = 100$ folgt: $f(t) = 20 + 80 \cdot e^{t \cdot \ln 0,9}$.

b) In dem Monat nach dem Zeitpunkt t vergisst er $f(t) - f(t+1)$ Prozent des Examensstoffes. Vergessen kann er zu diesem Zeitpunkt noch $f(t) - 20\%$, da er ja die 20% nie vergisst. Der Anteil ist also $\frac{f(t)-f(t+1)}{f(t)-20} = 10\%$. (durch Einsetzen, Ausklammern und Kürzen)

c) $f(12) \approx 42,6$. Nach einem Jahr hat er also noch 42,6% des Stoffes im Gedächtnis.

d) $f(t) = 75$ aufgelöst nach t: Nach ca. 3,6 Monaten weiß der Student noch 75% des Stoffes.

Aufgabe 5:

a) Aus der Anfangsbedingung $L(0) = 0$ folgt $a = 50$ und damit erhält man aus der Gleichung $L(15) = 15$ die Wachstumskonstante $k = \frac{1}{15} \ln \frac{35}{50} \approx -0,0238$.
Für die 42 Vokabeln benötigt er also ca. 77 Minuten.

b) Nach 30 Minuten weiß er 25 Vokabeln (natürlich abgerundet), nach der Pause also noch 20 Vokabeln. Es fehlen ihm also noch 22 Vokabeln, für die er nochmals 24,4 Minuten braucht. Insgesamt benötigt er für alle Vokabeln also mit weniger als 55 Minuten deutlich weniger Lernzeit als ohne Pause!

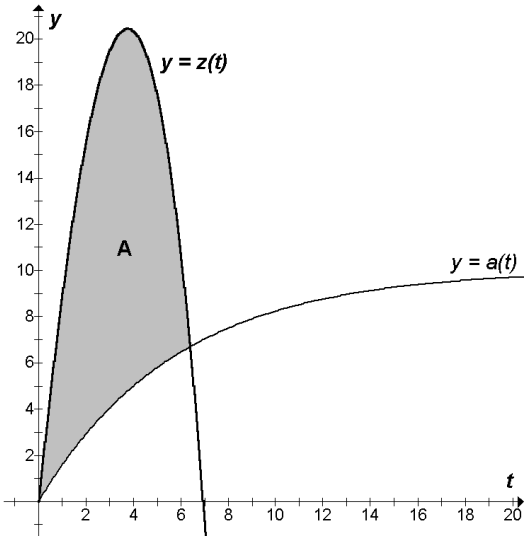
Aufgabe 6:

a) Ansatz: $f(x) = S + a \cdot e^{-k \cdot x}$. Grenzwert $S = 55$, also folgt aus $f(0) = 165$: $a = 110$.
Die Bedingung $f(1) = 100$ liefert dann $k = -\ln \frac{9}{22} \approx 0,894$. Ergebnis: $f(x) = 55 + 110 \cdot e^{-0,894x}$

b) Bedingung: $82,5 = 55 + 110 \cdot e^{-0,894x}$. Ergebnis: $x = \frac{\ln 0,25}{k} \approx 1,55$, es dauert also ca. 1,55 Minuten.

c) Berechnet man $f(40) - f(50)$ direkt mit dem Taschenrechner, so erhält man das falsche Ergebnis 0 („*Subtraktionskatastrophe*“). Vereinfacht man den Term aber (55 fällt weg), so erhält man als Unterschied $3,27 \cdot 10^{-14}$ kcal/min.

Aufgabe 7:



a) Es hört auf zu schneien wenn die Zunahme Null ist.
Gesucht ist also die Nullstelle der Funktion z.
GTR: Calc→Zero: $t_1 \approx 6,93$
Nach ca. 7 Tagen hört es auf zu schneien.
Um die gesamte geschneite Schneehöhe zu bestimmen, muss man die Zunahmefunktion integrieren:
GTR: $S_1 = \int_0^{t_1} z(t)\, dt \approx 94,16$
Es hat insgesamt also ca. 94,2 cm geschneit.

b) Ansatz: $a(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot x}$.
Grenzwert $S = 10$, also folgt aus $a(0) = 0$: $c = 10$.
Die Bedingung $a(4) = 5$ liefert dann $k = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2}$.
Ergebnis: $a(t) = 10 - 10 \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $k \approx 0,1733$.

c) Ab dem Schnittpunkt der beiden Schaubilder ist die Abnahme größer als die Zunahme. Bis zu diesem Zeitpunkt steigt die Schneehöhe, danach fällt sie. Die Fläche unter der Funktion z ist die geschneite Schneehöhe, die Fläche unter der Funktion a gibt die zurückgegangene Schneehöhe an. Der Inhalt der Fläche A entspricht also der maximalen Schneehöhe. Ihr Wert (67 cm) braucht nicht berechnet zu werden.
GTR: $\int_0^{t_1} (z(t) - a(t))\, dt = S_1 - \int_0^{t_1} a(t)\, dt \approx 65,19$
Wenn es aufhört zu schneien (zum Zeitpunkt t_1) liegt ca. 65,2 cm Schnee.

Es liegt kein Schnee mehr, wenn genau so viel weggetaut ist wie es geschneit hat. Es muss also folgende Gleichung nach x aufgelöst werden:

$$\int_0^x a(t)\, dt = S_1$$
$$\int_0^x (10 - 10 \cdot e^{-k \cdot t}) dt = S_1$$
$$\left[10t + \tfrac{10}{k} \cdot e^{-k \cdot t}\right]_0^x = S_1$$
$$10x + \tfrac{10}{k} \cdot e^{-k \cdot x} - \tfrac{10}{k} = S_1$$

Diese Gleichung kann man mit dem GTR-Solver lösen oder indem man die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = 10x + \frac{10}{k} \cdot e^{-k \cdot x} - \frac{10}{k} - S_1$ (mit den oben angegebenen Parametern k und S_1, die man am besten im Rechner speichert) berechnet. Ergebnis: $x \approx 14,74$
Nach ca. 14,8 Tagen liegt kein Schnee mehr.