Aufgabe 1:
Eine bereits 80 cm hohe Pflanze wird gedüngt. Dadurch ergibt sich ein Wachstum, das in den folgenden 10 Wochen näherungsweise beschrieben wird durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1}{100}t^2 \cdot (10-t)^2 \quad (f(t) \text{ in cm pro Woche, } t \text{ in Wochen seit der Düngung}).$$

a) Wann wächst die Pflanze am schnellsten? Wie hoch ist sie dann?

b) Wie hoch ist die Pflanze nach 10 Wochen?

LÖSUNG:

a) Das Wachstum der Pflanze ist am größten, wenn die Wachstumsfunktion f ihr Maximum hat. Dieses kann man durch Nullsetzen der Ableitungsfuntktion f' und Überprüfung des Vorzeichenwechsels bestimmen (oder mit dem GTR).
Der Hochpunkt des Schaubildes von f liegt bei $\mathrm{H}(5 \mid 6,25)$. Die Pflanze wächst also am schnellsten genau nach 5 Wochen.

Die Funktion f beschreibt die Änderungsrate der Pflanzenhöhe h. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
h(t) &= h(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\,d\tilde{t} = 80 + \int_0^t \left(\frac{1}{100}\tilde{t}^2 \cdot (10-\tilde{t})^2\right)\,d\tilde{t} \\
&= 80 + \int_0^t \left(\frac{1}{100}\tilde{t}^2 \cdot (100 - 20\tilde{t} + \tilde{t}^2)\right)\,d\tilde{t} = 80 + \int_0^t \left(\tilde{t}^2 - \frac{1}{5}\tilde{t}^3 + \frac{1}{100}\tilde{t}^4\right)\,d\tilde{t} \\
&= 80 + \left[\frac{1}{3}\tilde{t}^3 - \frac{1}{20}\tilde{t}^4 + \frac{1}{500}\tilde{t}^5\right]_0^t = \frac{1}{500}t^5 - \frac{1}{20}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 80 \\
\Rightarrow h(5) &= 96\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Die Pflanze ist also ca. 97 cm hoch wenn sie am schnellsten wächst.

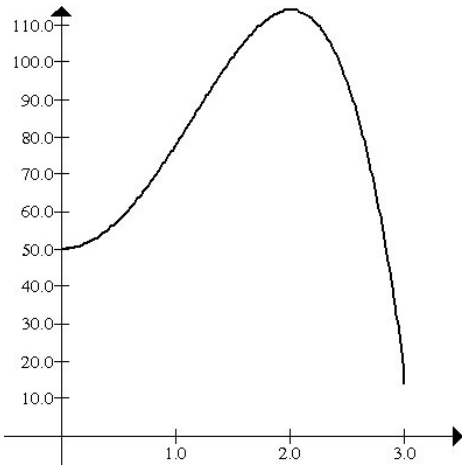
b) $h(10) = 113\frac{1}{3}$. Nach 10 Wochen ist die Pflanze also ca. 113 cm hoch.

Aufgabe 2:
Die Geschwindigkeit in km/h während einer dreistündigen Autofahrt ist gegeben durch die Funktion v. Zeichne das Schaubild von v. Bestimme die maximale Geschwindigkeit und den Ort, an dem das Auto die maximale Geschwindigkeit besitzt. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit und den Weg, den das Auto während der drei Stunden zurück legt.

a) $v(t) = -4t^2 \cdot (t^2 - 8) + 50$ **b)** $v(t) = \frac{50}{3}(-t^2 + 2t + 3)$ (t in h)

LÖSUNG:

a)



Durch Ableiten (oder mit GTR): H(2 | 114)
Die maximale Geschwindigkeit beträgt also 114 km/h.

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tilde{t})\, d\tilde{t} \\ &= 0 + \int_{0}^{t} \left(-4\tilde{t}^4 + 32\tilde{t}^2 + 50\right)\, d\tilde{t} \\ &= \left[-\tfrac{4}{5}\tilde{t}^5 + \tfrac{32}{3}\tilde{t}^3 + 50\tilde{t}\right]_0^t \\ &= -\tfrac{4}{5}t^5 + \tfrac{32}{3}t^3 + 50t \end{aligned}$$

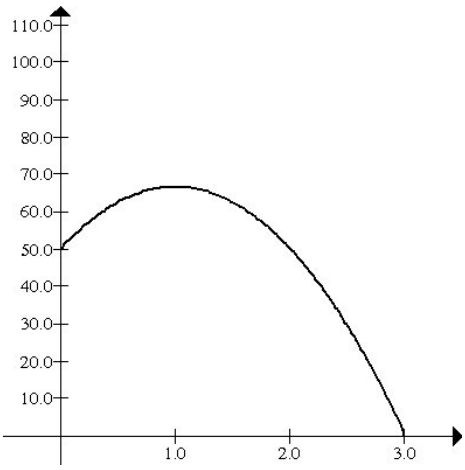
$\Rightarrow s(2) = 159\frac{11}{15}$ und $s(3) = 243,6$

nach ca. 160 km ist die Geschwindigkeit maximal. Durchschnittsgeschwindigeit:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 v(t)\, dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 \left(-4t^2 \cdot (t^2 - 8) + 50\right)\, dt \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{4}{5}t^5 + \frac{32}{3}t^3 + 50t\right]_0^3 = 81,2 \end{aligned}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 81,2 km/h und das Auto legt 243,6 km zurück.

b)



Durch Ableiten (oder mit GTR): H($1 \mid 66\frac{2}{3}$)
Die maximale Geschwindigkeit beträgt also $66\frac{2}{3}$ km/h.

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tilde{t})\, d\tilde{t} \\ &= 0 + \int_{0}^{t} \left(\frac{50}{3}(-\tilde{t}^2 + 2\tilde{t} + 3)\right)\, d\tilde{t} \\ &= \tfrac{50}{3}\left[-\tfrac{1}{3}\tilde{t}^3 + \tilde{t}^2 + 3\tilde{t}\right]_0^t \\ &= -\tfrac{50}{9}t^3 + \tfrac{50}{3}t^2 + 50t \end{aligned}$$

$\Rightarrow s(1) = 61\frac{1}{9}$ und $s(3) = 150$

nach ca. 61 km ist die Geschwindigkeit maximal. Durchschnittsgeschwindigeit:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 v(t)\, dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 \left(\frac{50}{3}(-t^2 + 2t + 3)\right)\, dt \\ &= \frac{50}{9}\left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t\right]_0^3 = 50 \end{aligned}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 50 km/h und das Auto legt 150 km zurück.

Aufgabe 3:
Eine Aktie wird zu einem Startpreis von 33 € neu in der Börse eingeführt. Die **Änderung** des Aktienkurses betrage am Anfang 3 € pro Woche. Nach fünf Wochen hat die Zunahme pro Woche den maximalen Wert erreicht und nach zwölf Wochen ist die Änderungsrate auf Null zurück gegangen. Die Funktion f, die die Änderung des Aktienkurses in €/Woche zur Zeit t in Wochen angibt, soll näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion zweiten Grades angegeben werden.

a) Ermittle die Funktionsgleichung von f.

b) Bestimme ohne Rechnung den Zeitpunkt, an dem der Aktienkurs maximal ist.

c) Gib eine Gleichung des Aktienkurses $K(t)$ in € zum Zeitpunkt t in Wochen an. Wie groß ist der maxinale Aktienkurs und wann ist der Wert der Aktie wieder auf 33 € gefallen?

LÖSUNG:

a) Gesucht ist die Funktion f, die die **Änderung** des Aktienkurses $K(t)$ angibt. Die angegebene Wert 33 € ist ein Funktionswert von K, sagt aber nichts über die Kursänderung aus!

$$\text{Ansatz für } f: \quad \begin{aligned} f(t) &= at^2 + bt + c \\ f'(t) &= 2at + b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcrl} \text{I} & f(0) = 3 & \Rightarrow & c &= 3 \\ \text{II} & f'(5) = 0 & \Rightarrow & 10a + b &= 0 \\ \text{III} & f(12) = 0 & \Rightarrow & 144a + 12b &= -3 \\ \hline & \text{el. } b\text{: III} - 12 \cdot \text{II} & & 24a &= -3 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{8} \\ & \text{in II} & & -\frac{10}{8} + b &= 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{4} \end{array}$$

$$\boxed{f(t) = -\tfrac{1}{8}t^2 + \tfrac{5}{4}t + 3}$$

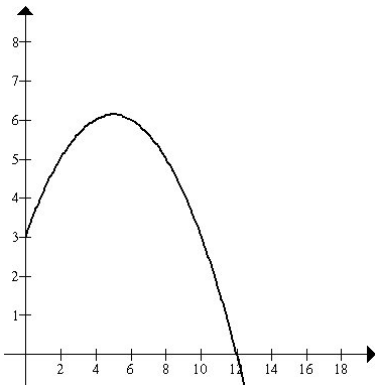
b) Der Aktienkurs ist maximal, wenn die Änderung (Ableitung) Null ist und einen Vorzeichenwechsel von + nach − besitzt. Dies ist zum Zeitpunkt $t = 12$ der Fall. Nach genau zwölf Wochen ist also der Aktienkurs maximal.

c) Die bekannte Funktion f beschreibt die Ableitung des Aktienkurses K. Also gilt:

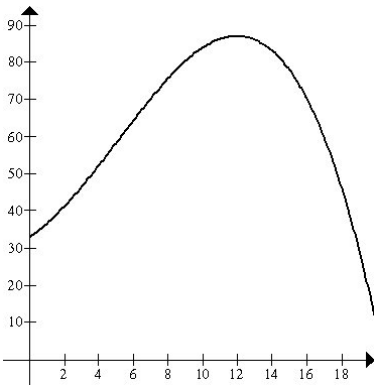
$$K(t) = K(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx = 33 + \int_0^t \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 3\right) dx$$
$$= 33 + \left[-\tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{5}{8}x^2 + 3x\right]_0^t = \underline{\underline{-\tfrac{1}{24}t^3 + \tfrac{5}{8}t^2 + 3t + 33}}$$

Maximaler Aktienkurs: $K(12) = 87$ $\Rightarrow$ Der höchste Aktienkurs beträgt 87 €.
Wann wieder 33 €? $K(t) = 33$ $\Rightarrow$ Nach ca. 19 Wochen ist der Aktienkurs 33 €.

Schaubilder: $y = f(t)$:



$y = K(t)$:



Aufgabe 4: *(Hilfsmittel: GTR)*
Eine ganzrationale Funktion $f\colon t \mapsto f(t)$ dritten Grades besitzt die Extrempunkte H(10 | 1) und T(50 | 0). Nach einer Verletzungspause liegt die Leistungsfähigkeit eines Sportlers nur noch bei 70 %. Durch tägliches Training versucht er, diese wieder zu erhöhen. Die **Zunahme** der Leistungsfähigkeit in Prozentpunkten pro Tag ist gegeben durch die Funktion f.

a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f und zeichne das Schaubild für $0 \le t \le 50$.

b) Beschreibe qualitativ, wie sich die Leistungsfähigkeit des Sportlers ändert. Nimmt diese auch mal ab?

c) Wann ist die Zunahme der Leistungsfähigkeit (also der Trainingseffekt) am größten?

d) Gib einen Term der Funktion $L(t)$ an, die die Leistungsfähigkeit (in Prozent) des Sportlers nach der Zeit t (in Tagen) angibt. Berechne $L(10)$, $L(20)$ und $L(50)$.

LÖSUNG:

a)

Ansatz für f:
$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
$f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

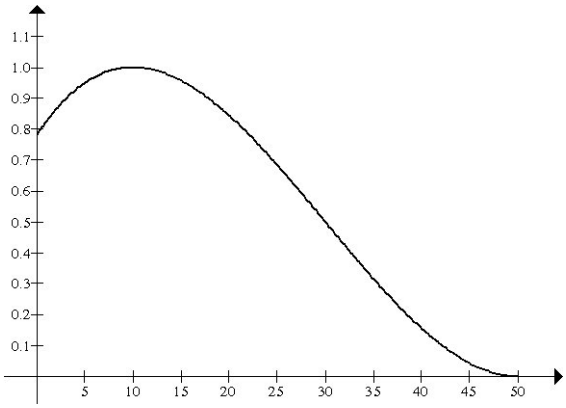
$$\begin{array}{lrcrl}
\text{I} & f(10) = 1 & \Rightarrow & 1000a + 100b + 10c + d & = 1 \\
\text{II} & f'(10) = 0 & \Rightarrow & 300a + 20b + c & = 0 \\
\text{III} & f(50) = 0 & \Rightarrow & 125000a + 2500b + 50c + d & = 0 \\
\text{IV} & f'(50) = 0 & \Rightarrow & 7500a + 100b + c & = 0
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
1000 & 100 & 10 & 1 & 1 \\
300 & 20 & 1 & 0 & 0 \\
125000 & 2500 & 50 & 1 & 0 \\
7500 & 100 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right] \xrightarrow{\textbf{rref}} \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32000} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{3200} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{64} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{25}{32}
\end{array}\right]$$

(Die Brüche erhält man nach der Anzeige der Matrix durch **MATH**→ ▹**Frac** *und* $\frac{3{,}125}{100000} = \frac{25}{8 \cdot 100000} = \frac{1}{32000}$*)*

Ergebnis: $\boxed{f(t) = \frac{1}{32000}t^3 - \frac{9}{3200}t^2 + \frac{3}{64}t + \frac{25}{32}}$

b) Rechts ist das Schaubild von f dargestellt, welches nicht die Leistungsfähigkeit L angibt, sondern lediglich deren **Zunahme**.
Da die Zunahme stets positiv ist, nimmt die Leistungsfähigkeit nie ab. Die Leistungsfähigkeit steigt am Anfang etwas schwächer und nach genau 10 Tagen am stärksten. Danach steigt die Leistungsfähigkeit zwar immer noch, aber immer schwächer, bis sie bei 50 Tagen überhaupt nicht mehr zunimmt.



c) Nach genau 10 Tagen ist die Zunahme der Leistungsfähigkeit am größten. Dort hat das Schaubild von L einen Wendepunkt.

d)
$$L(t) = L(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx = 70 + \int_{0}^{t} \left(\tfrac{1}{32000}x^3 - \tfrac{9}{3200}x^2 + \tfrac{3}{64}x + \tfrac{25}{32}\right)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{128000}t^4 - \tfrac{3}{3200}t^3 + \tfrac{3}{128}t^2 + \tfrac{25}{32}t + 70 \quad \Rightarrow L(10) = 79\tfrac{19}{64}, \quad L(20) = 88\tfrac{3}{4}, \quad L(50) = 99\tfrac{19}{64}$$

Nach 10 Tagen beträgt die Leistungsfähigkeit ca. 79 %, nach 20 Tagen ca. 89 % und nach 50 Tagen wieder fast 100 %.