Aufgabe 1:

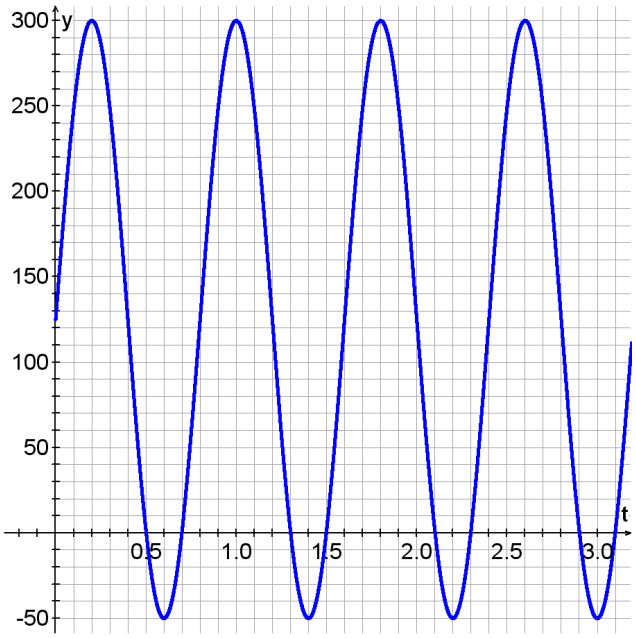
a) E ergibt sich aus der Sonneneinstrahlung, d.h. vor 8 Uhr und nach 18 Uhr wird kein Strom erzeugt weil es dunkel ist.
Der Verbrauch V setzt sich zusammen aus einem dauernden Konstantverbrauch (z.B. von einem Kühlschrank) und einem größeren Verbrauch zwischen 6 und 8 Uhr sowie zwischen 18 und 21 Uhr (z.B. wegen der Beleuchtung).

b) Mit dem GTR berechnet man die entsprechenden Schnittpunkte zwischen dem Schaubild von E und der Gerade $y = 0,5$. Man erhält $x_1 \approx 8,932$ und $x_2 \approx 17,068$. Es handelt sich also um 8,14 Stunden. Die Verbraucher können also 8 Stunden und 8 Minuten verwendet werden.

c) Die Gesamtenergie ergibt sich als Fläche zwischen Schaubild und t-Achse. Sie beträgt in kJ/min·h: $W = \int_8^{18} E(t)\,dt \overset{\text{GTR}}{=} 30$. Es sind also 1800 kJ (das entspricht 0,5 kWh).

d) Die Fläche unter dem Schaubild von E ist 30. Die Fläche unter dem Schaubild von V besteht aus 5 Rechtecken. Die Fläche beträgt $A = 6 \cdot 0,5 + 2 \cdot 3 + 10 \cdot 0,5 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0,5 = 24,5 < 30$.
Die Verbraucher können also wie vorgesehen betrieben werden.

Aufgabe 2:



a) Das Standard-Sinusschaubild ist um 175 in y-Richtung gestreckt und so in x-Richtung gestreckt, dass die Periodenlänge $\frac{2\pi}{2,5\pi} = 0,8$ ist. Außerdem ist das Schaubild dann noch um 125 in y-Richtung verschoben. Eine komplette Kurbelumdrehung dauert also 0,8 Sekunden.

b) Entweder man berechnet den Mittelwert mit der Formel $M = \frac{1}{0,8} \int_0^{0,8} F_R(t)\,dt$ oder man verwendet die Überlegungen aus a) und die Tatsache, dass der Mittelwert einer Standard-Sinusschwingung während einer Periode Null ist.
Wegen der Verschiebung ist die durchschnittliche Tangeltialkraft F_R während einer Kurbelumdrehung 125 N.

c) Man muss das Intervall bestimmen, auf dem die Funktionswerte negativ sind. Mit dem GTR erhält man die beiden Nullstellen $x_1 \approx 0,5013$ und $x_2 \approx 0,6987$. Diese Phase dauert also ca. 0,1974 Sekunden. Das entspricht ca. 24,7% einer Kurbelumdrehung, also fast ein Viertel!

d) Die Hochpunkte wären dann unverändert und die Tiefpunkte lägen auf der x-Achse. Die Wendepunkte lägen also auf der Gerade $y = 150$.
Die Gleichung lautete dann $F_R^*(t) = 150 \cdot \sin(2,5\pi t) + 150$. Die Durchschnittliche Tangeltialkraft wäre dann 150 N, also 20% mehr! Es lohnt sich also daran zu arbeiten, den Fuß bei der Aufwärtsbewegung nicht einfach auf dem Pedal „stehen“ zu lassen.

e) Die erste Hälfte der ersten Periode ist die Abwärtsbewegung des Pedals. Das Pedal steht bei $t = 0$ also ungefähr oben.

f) $s(8) = \int_0^8 v(t)\,dt \overset{\text{GTR}}{=} 66,4$ Der Radfahrer legt in den ersten 8 Sekunden also 66,4 m zurück.

Aufgabe 3:

a) **1. Möglichkeit:** (mit 2. Ableitung)

Wendepunkte $\iff$ $f''(x) = 0 \wedge \text{VZW}$

$f'(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b}t\right) \cdot \frac{\pi}{b} = \frac{3\pi}{b} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b}t\right)$

$f''(x) = \frac{3\pi}{b} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{b}t\right)\right) \cdot \frac{\pi}{b} = -\frac{3\pi^2}{b^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}t\right)$

$-\frac{3\pi^2}{b^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}t\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{b}t = k \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad t = k \cdot b$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

VZW ist bei trigonometrischer Funktion klar.

y-Wert: $f(k \cdot b) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} \cdot k \cdot b\right) + 3 = 3$ (denn $\sin(k \cdot \pi) = 0$)

Die Wendepunkte lauten also $\mathrm{W}_k(k \cdot b \,|\, 3)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

2. Möglichkeit: (durch Verschiebung und Streckung)

Man überlegt sich, wie das Schaubild von f_b aus dem Standard-Sinusschaubild hervorgeht:

- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3 (die Amplitude ist 3).
- Streckung in x-Richtung so, dass die Periode $\frac{2\pi}{\pi/b} = 2b$ ist.
- Verschiebung in y-Richtung um 3 nach oben.

Somit ist klar, dass die Wendepunkte (alle halbe Periode) bei $\mathrm{W}_k(k \cdot b \,|\, 3)$ liegen (mit $k \in \mathbb{Z}$).

b) Gesucht ist also eine ganzrationale Funktion 2. Grades, die in den Punkten A(0 | 3), B(1 | 6) und C(2 | 3) mit dem Schaubild von f_2 übereinstimmt.

1. Möglichkeit: (durch Verschieben und Strecken der Normalparabel)

Der Scheitel liegt bei B(1 | 6) und die Formvariable der nach unten geöffneten Parabel ist -3 (man geht vom Scheitel aus 1 nach rechts und 3 nach unten, um wieder auf der Parabel zu landen).
Also $g(x) = -3 \cdot (x-1)^2 + 6 = -3x^2 + 6x - 3 + 6 = -3x^2 + 6x + 3$

2. Möglichkeit: (mit dem Ansatz $g(x) = ax^2 + bx + c$ wie Steckbriefaufgabe)

Eigenschaften von g:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{I} & g(0) & = & 3 & \Leftrightarrow & c = 3 \\ \text{II} & g(1) & = & 6 & \Leftrightarrow & a + b + c = 6 \\ \text{III} & g(2) & = & 3 & \Leftrightarrow & 4a + 2b + c = 3 \end{array}$$

GTR:
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \to \; a = -3 \\ \to \; b = 6 \\ \to \; c = 3 \end{array} \qquad g(x) = -3x^2 + 6x + 3$$

3. Möglichkeit: (Berechnen einer Regressionsparabel mit dem GTR)

Man definiert die Listen:

L_1	L_2
0	3
1	6
2	3

Unter STAT → CALC → **QuadReg**: $g(x) = -3x^2 + 6x + 3$

Um die stärkste Abweichung der Funktionen Y_1 und Y_2 zu berechnen, gibt man im GTR die Differenzfunktion ein und bestimmt das Maximum.

GTR:
$Y_1 = 3\sin(\pi/2 * X) + 3$
$Y_2 = -3x^2 + 6x + 3$
$Y_3 = Y_2 - Y_1$
CALC → Maximum von Y_3 mit LeftBound: 0 und RightBound: 1 Maximum=0,3
CALC → Maximum von Y_3 mit LeftBound: 1 und RightBound: 2 Maximum=1,7

An den Stellen 0,3 und 1,7 weicht die Näherungsfunktion am stärksten von f_2 ab.

c) Anzahl der Exemplare mit GTR: $E = 120 + \int_0^{50} \left(3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 3\right) dt \approx 271{,}54$

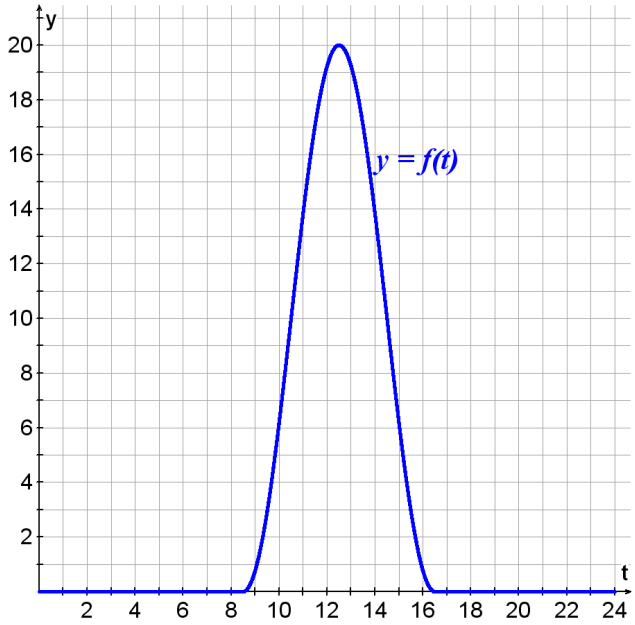
Nach 50 Stunden sind es also 272 Exemplare.

Aufgabe 4:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(2x)\,dx = \left[-3\cos(2x)\cdot\frac{1}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{3}{2}\cos(2x)\cdot\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}\underbrace{\cos(\pi)}_{-1}+\frac{3}{2}\underbrace{\cos(0)}_{1} = \frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 3$

b) $\int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{4}\cos(\pi x)+2\right)dx = \left[\frac{1}{4}\sin(\pi x)\cdot\frac{1}{\pi}+2x\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{1}{4\pi}\sin(\pi x)+2x\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4\pi}\underbrace{\sin(0)}_{0}+0-\left(\frac{1}{4\pi}\underbrace{\sin(-\pi)}_{0}-2\right) = 2$

Aufgabe 5:



a) Gesucht ist also eine trigonometrische Funktion mit dem Hochpunkt H(12,5|20) und den Tiefpunkten $T_1(8,5\,|\,0)$ und $T_2(16,5\,|\,0)$.

1. Möglichkeit: (Verschieben und Strecken)
Verwendet man eine Sinusfunktion, so liegt der charakteristische Punkt (in den der Origo verschoben wird) bei W(10,5|10). Die Amplitude ist 10, die Periode beträgt 8. Für den Parameter b gilt also $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.
$f(t) = 10\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(t-10,5)\right)+10$
für $8,5 \le t \le 16,5$

2. Möglichkeit: (Sinus-Regression)

Listen:

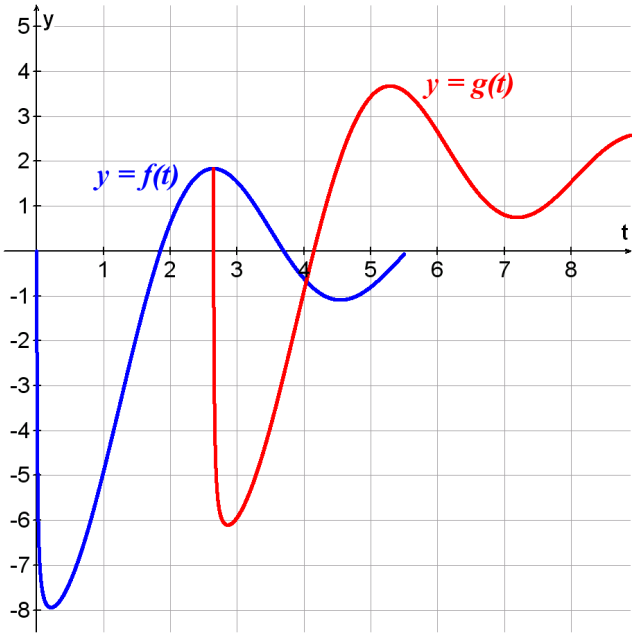
L_1	L_2
8,5	0
10,5	10
12,5	20
14,5	10
16,5	0

STAT → CALC → **SinReg Y_1** liefert $f(x) = 10\cdot\sin(0,7854x-1,9635)+10$

b) $\int\limits_{8,5}^{16,5} f(t)\,dt \overset{\text{GTR}}{=} 80$

An diesem Tag produziert die Anlage also 80 kWh Solarenergie. Man bekommt dafür also 40 €.

Aufgabe 6:



a) Das Schaubild von f ist blau gezeichnet.
Das Training dauert bis zum Tiefpunkt.
GTR: CALC → Minimum: X=0,2142
$0,2142\cdot 24 = 5,141$ Das Training dauert also ca. 5 Stunden und 8 Minuten.

b) GTR: CALC → Zero: X=1,848
Nach ca. einem Tag und 20 Stunden ist das anfängliche Leistungsniveau wieder erreicht.

c) Das zweite Training beginnt beim Maximum von f.
CALC → Maximum: X=2,6437 Y=1,8395
Speichere $X \to A$ und $Y \to B$.
Für das zweite Training gilt also
$g(t) = -\frac{5}{t-A+0,01}\cdot\sin\left(1,7(t-A)\right)+B \qquad (t \ge A)$
GTR: CALC → Zero von g: X=4,1449
Das anfängliches Leistungsniveau ist wieder nach 4 Tagen und 3,5 Stunden erreicht.
GTR: CALC → Maximum von g: X=5,2874 Y=3,6791 Maximale Leistungsfähigkeit ist ca. 3,7.

d) Es würde sich um lineares Wachstum handeln (immer eine Leistungssteigerung um 1,84 pro Training). Das ist nicht realistisch weil es unbegrenzt wachsen würde.