Aufgabe 1:

Eine Origosymmetrische ganzrationale Funktion fünften Grades berührt die x-Achse an der Stelle 2. Im ersten Feld schließt das Schaubild der Funktion mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Flächeninhalt $\frac{32}{3}$ Flächeneinheiten beträgt.

(Im Matrix-Editier-Modus können auch Brüche eingegeben werden.)

Aufgabe 2:

Eine ganzrationale Funktion vierten Grades berührt die x-Achse an den Stellen 1 und 4. Das Schaubild der Funktion schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Flächeninhalt $8,1$ Flächeneinheiten beträgt.

Aufgabe 3:

Ein Mathekurs wird von 24 Schülern besucht (wobei auch Schülerinnen gemeint sind), die aus St. Peter, St. Märgen, Stegen und Kirchzarten kommen. Es wohnen 5 Mal so viele Schüler im Tal wie auf "dem Berg". Das Doppelte der Schülerzahl aus Kirchzarten ist um 16 größer als die Zahl der St. Märgener Schüler. Aus St. Märgen und Stegen zusammen sind es genau 4 Schüler mehr als aus Kirchzarten.

a) Bestimme die Lösungsmenge des LGS.

b) Wie viele Schüler wohnen in den einzelnen Orten wenn vorausgesetzt wird, dass aus jedem Ort mindestens ein Schüler den Mathekurs besucht?

c) Bestimme die zusätzlichen Lösungen, wenn auch erlaubt ist, dass in einem der Orte keiner der Schüler wohnt?

Aufgabe 1:

Ansatz wegen Origo-Symmetrie: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$
$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & f(2) = 0 & \to & 32a + 8b + 2c = 0 \\
\text{II} & f'(2) = 0 & \to & 80a + 12b + c = 0 \\
\text{III} & \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{32}{3} & &
\end{array}$$

$$\int_0^2 \left(ax^5 + bx^3 + cx\right)\,dx = \left[\tfrac{1}{6}ax^6 + \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{2}cx^2\right]_0^2 = \tfrac{64}{6}a + 4b + 2c - 0$$

$$\to \quad \tfrac{64}{6}a + 4b + 2c = \tfrac{32}{3}$$

$$\text{GTR:} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 32 & 8 & 2 & 0 \\ 80 & 12 & 1 & 0 \\ \frac{64}{6} & 4 & 2 & \frac{32}{3} \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right] \end{array}$$

Es handelt sich also um die Funktion f mit $f(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$.

Aufgabe 2: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$\int_1^4 \left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right)\,dx = \left[\tfrac{1}{5}ax^5 + \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{2}dx^2 + ex\right]_1^4$$
$$= \tfrac{1024}{5}a + 64b + \tfrac{64}{3}c + 8d + 4e - \tfrac{1}{5}a - \tfrac{1}{4}b - \tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{2}d - e$$

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & f(1) = 0 & \to & a + b + c + d + e = 0 \\
\text{II} & f'(1) = 0 & \to & 4a + 3b + 2c + d = 0 \\
\text{III} & f(4) = 0 & \to & 256a + 64b + 16c + 4d + e = 0 \\
\text{IV} & f'(4) = 0 & \to & 256a + 48b + 8c + d = 0 \\
\text{V} & \int_1^4 f(x)\,dx = 8,1 & \to & 204,6a + 63,75b + 21c + 7,5d + 3e = 8,1
\end{array}$$

Mit dem GTR erhält man: $f(x) = x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16$

Aufgabe 3: p, m, s, k: Anzahl der Schüler aus den vier Orten

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & p + m + s + k = 24 \\
\text{II} & s + k = 5 \cdot (p + m) \\
\text{III} & 2k = 16 + m \\
\text{IV} & m + s = 4 + k
\end{array}
\qquad
\text{GTR:} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & m & s & k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ -5 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

a) Der GTR liefert $\mathbb{L} = \{(20 - 2t;\ 2t - 16;\ 20 - t;\ t) \mid 8 \le t \le 10\}$, wobei die Einschränkungen daher rühren, dass die vier Zahlen alle nicht negativ sein dürfen.

b) Alle Zahlen müssen echt positiv sein, also $t = 9$ und $\mathbb{L} = \{(2;\ 2;\ 11;\ 9)\}$.

c) Die =-Zeichen sind jetzt auch erlaubt, also auch $t = 8$ und $t = 10$.
Es gilt jetzt also $\mathbb{L} = \{(4;\ 0;\ 12;\ 8),\ (2;\ 2;\ 11;\ 9),\ (0;\ 4;\ 10;\ 10)\}$.