♡ ♡ ♡ Gruppe Herz: Linearkombinationen ♡ ♡ ♡

Wenn r und s zwei reelle Zahlen sind, dann ist der Vektor $\vec{z}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt:

$$\vec{z} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

a) In 2 Dimensionen:

Stelle **zeichnerisch** und **rechnerisch** den Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dar.

b) In 3 Dimensionen:

Stelle rechnerisch den Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ dar.

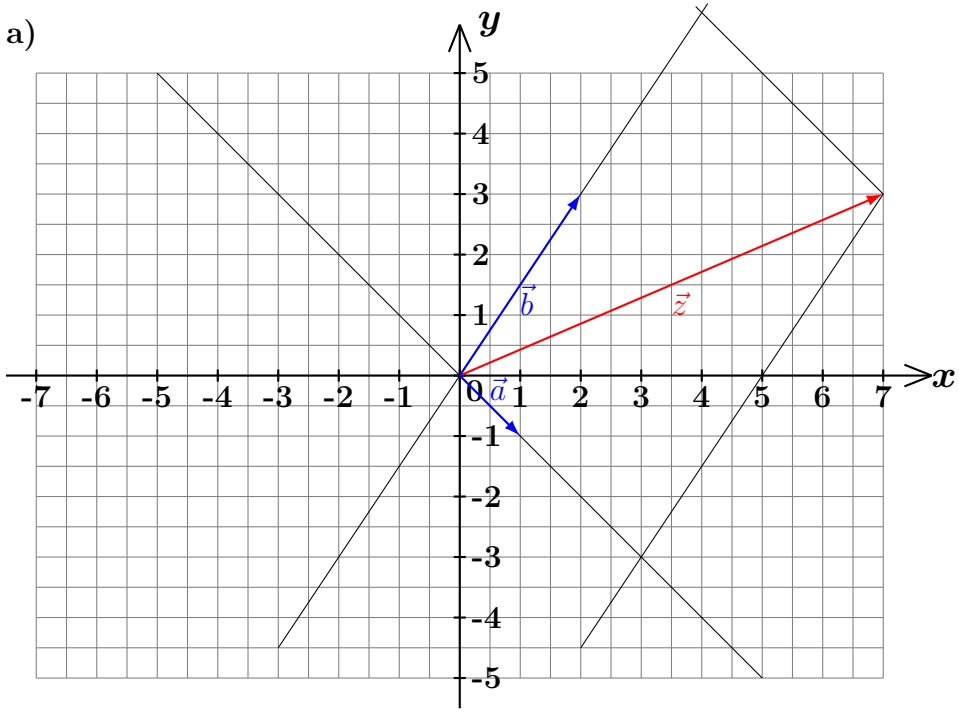
T I P P S:

a) **Zeichnerisch:** Zeichne die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{z}$ so in ein zweidimensionales Koordinatensystem ein, dass alle im Origo beginnen. Verlängere die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (zu Geraden). Zeichne durch das Ende des Vektors $\vec{z}$ Parallelen zu diesen Geraden. Somit erhältst Du ein Parallelogramm, dessen Diagonale $\vec{z}$ ist. Dann können die Parameter r und s abgelesen werden.
Rechnerisch: Stelle die Vektorgleichung $\vec{z} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ auf. Jede Zeile ist eine Gleichung mit den Variablen r und s. Man hat also ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, welches man von Hand oder mit dem GTR lösen kann.

b) Stelle die Vektorgleichung $\vec{z} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ auf. Dieses LGS kann man mit dem GTR lösen.

♡ ♡ ♡ Gruppe Herz — Lösungen ♡ ♡ ♡

a)



Man kann ablesen, dass $\vec{z} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

Rechnerisch:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{LGS:} \quad \begin{array}{lrcl} \text{I} & r + 2s & = & 7 \\ \text{II} & -r + 3s & = & 3 \end{array}$$

$$\text{GTR:} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{GTR:} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -10 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{l} r = 2 \\ s = 3 \\ t = -2 \end{array}$$

◇ ◇ ◇ Gruppe Karo: Abstände ◇ ◇ ◇

Für die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

a) Berechne die Länge der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Berechne den Abstand der Punkte $A(-4\,|\,2\,|-1)$ und $B(-2\,|\,1\,|1)$.

c) Ein Rechteck hat die Punkte $A(3\,|\,2\,|-1)$, $B(3\,|\,6\,|-1)$, $C(1\,|\,6\,|-1)$ und $D(1\,|\,2\,|-1)$. Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks.

d) Bestimme den Parameter t so, dass die Punkte $A(-5\,|\,8\,|-1)$ und $B_t(t\,|\,8\,|\,3)$ einen Abstand von 5 LE haben.

T I P P S:

a) Einfach die Formel oben verwenden.

b) Bestimme wie in a) die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

c) Die Seitenlängen des Rechtecks sind gegeben durch $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist das Produkt der Längen dieser beiden Vektoren.

d) Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}_t$ in Abhängigkeit vom Parameter t und setze die Länge gleich 5. Bestimme dann die Lösung der Bruchgleichung.
(Achtung: Bei Bruchgleichungen am Schluss die Probe machen!)

11/12 Mathematik **Wiederholung Geometrie** *R. Schwörer*

◇ ◇ ◇ Gruppe Karo — Lösungen ◇ ◇ ◇

a) $|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$
$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Die Punkte A und B haben einen Abstand von 3 LE.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16} = 4$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4} = 2$

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt also 8 FE.

b) $\overrightarrow{AB}_t = \begin{pmatrix} t+5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(t+5)^2 + 0 + 16}$

Es muss gelten:
$$\begin{aligned} \sqrt{(t+5)^2+0+16} &= 5 && |()^2 \\ (t+5)^2 + 16 &= 25 && |-16 \\ (t+5)^2 &= 9 \\ t+5 &= \pm 3 && |-5 \\ t_1 &= -2 \\ t_2 &= -8 \end{aligned}$$

Probe für t_1: $\sqrt{(-2+5)^2+0+16} = \sqrt{9+16} = 5$ Ok

Probe für t_2: $\sqrt{(-8+5)^2+0+16} = \sqrt{9+16} = 5$ Ok

Die Punkte A und B_t haben für $t = -2$ oder $t = -8$ einen Abstand von 5 LE.

♣ ♣ ♣ Gruppe Kreuz: Geradengleichungen ♣ ♣ ♣

Wenn die Gerade g durch die Punkte A und B geht, lautet die Geradengleichung $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$.
$\overrightarrow{OA}$ ist dabei der Ortsvektor des Punktes A.

Ein Punkt P liegt auf der Geraden g, wenn man seinen Ortsvektor für x in die Gleichung einsetzt, und alle drei Zeilen für ein t erfüllt sind.

a) Bearbeite **zeichnerisch** und **rechnerisch**:
Die Gerade g enthält die Punkte $A(-5\,|\,3)$ und $B(-1\,|\,1)$. Liegen die Punkte $P(6\,|\,-1)$ und $Q(7\,|\,-3)$ auch auf der Geraden g?

b) Bestimme eine Gleichung der Gerade h durch die Punkte $A(-4\,|\,2\,|\,-1)$ und $B(-2\,|\,1\,|\,1)$.
Liegt der Punkt $P(6\,|\,-3\,|\,9)$ auf der Geraden g?
Liegt der Punkt $Q(2\,|\,-1\,|\,3)$ auf der Geraden g?

c) Bestimme den Parameter a so, dass der Punkt $P_a(-3\,|\,a\,|\,-7)$ auf der Geraden durch die Punkte $A(-3\,|\,4\,|\,-1)$ und $B(-3\,|\,3\,|\,2)$ liegt.

T I P P S:

a) Zeichnerisch trägt man die Punkte A und B in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein und zeichnet dann die Gerade g durch die Punkte A und B. Man sieht dann, welcher der Punkte P und Q auf der Geraden liegt. Rechnerisch geht man vor wie oben beschrieben.

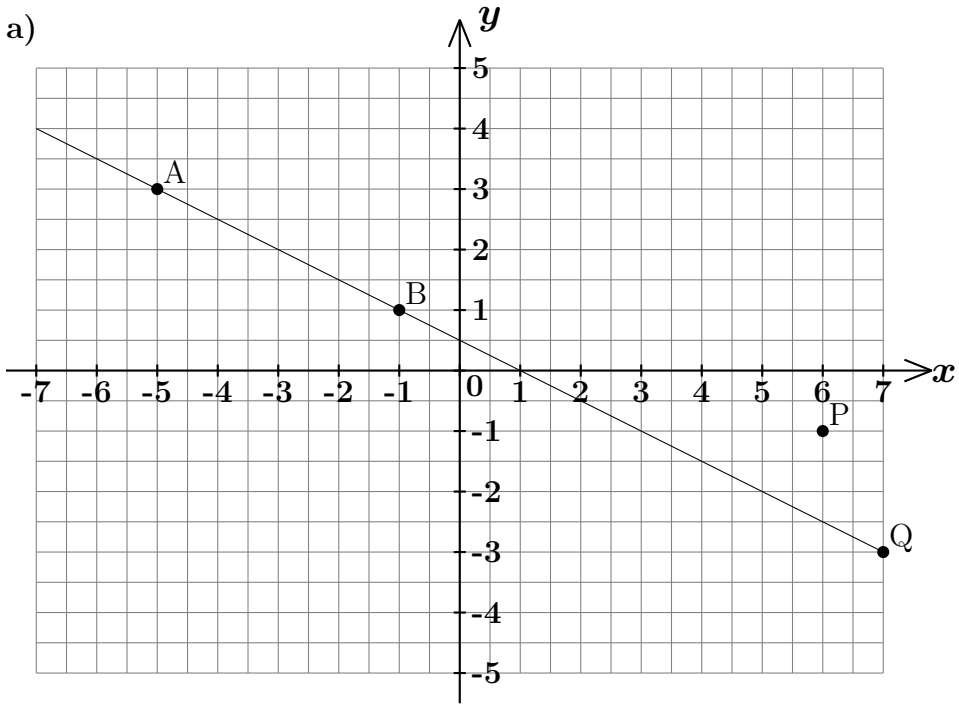
b) Siehe oben.

c) Man stellt die Geradengleichung auf und setzt den Ortsvektor von P_a für $\vec{x}$ ein. Aus den Gleichungen, die kein a enthalten bestimmt man t, das eindeutig sein muss. Mit diesem t kann man dann a berechnen.

11/12 Mathematik **Wiederholung Geometrie** *R. Schwörer*

♣ ♣ ♣ Gruppe Kreuz — Lösungen ♣ ♣ ♣

a)



Man kann erkennen, dass P nicht auf g liegt, Q aber schon. Außerdem kann man ablesen, dass der Parameter t hierbei 3 sein muss.
Rechnerisch:

Punkt P: $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow t = \frac{11}{4} \\ \longrightarrow t = 2 \end{matrix} \qquad P \notin g$

Punkt Q: $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow t = 3 \\ \longrightarrow t = 3 \end{matrix} \qquad Q \in g$

b) $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ergebnis: $P \in g$ $(t = 5)$ und $Q \notin g$.

c) $\begin{pmatrix} -3 \\ a \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow 0 = 0 \\ \longrightarrow a = 4 - t \implies \underline{\underline{a = 6}} \\ \longrightarrow t = -2 \end{matrix}$

♠ ♠ ♠ Gruppe Pik: Schnittpunkt von Geraden ♠ ♠ ♠

Den Schnittpunkt der Geraden $g: \quad \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad$ mit $t \in \mathbb{R}$
und $\quad h: \quad \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v} \quad$ mit $s \in \mathbb{R}$
bestimmt man, indem man die Gleichungen gleichsetzt und die Lösungen für t und s bestimmt. Gibt es eindeutige Lösungen, so ergeben sich daraus die Koordinaten des Schnittpunktes.
Achtung: Die beiden Parameter (hier t und s) müssen unterschiedlich heißen!

a) Bearbeite **zeichnerisch** und **rechnerisch**:
Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes von g und h mit
$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes von g und h mit
$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) Haben die Geraden g und h mit
$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
einen gemeinsamen Punkt?

T I P P S:

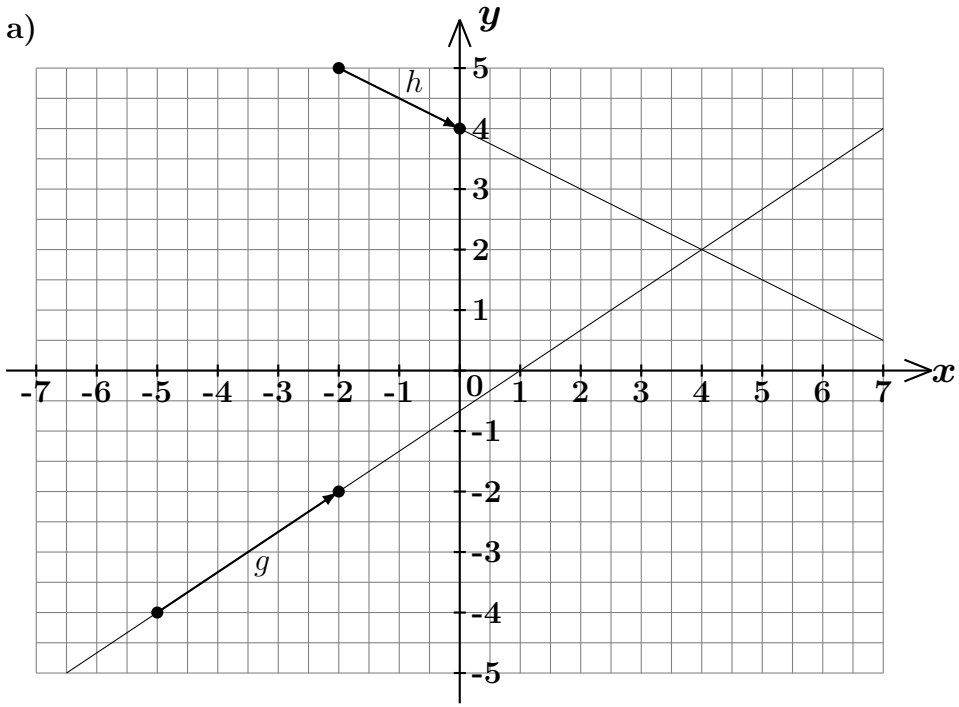
a) Zeichnerisch: Geraden zeichnen und die Koordinaten des Schnittpunktes ablesen. Rechnerisch geht man vor wie oben beschrieben.

b) Erhält man nach dem Lösen des LGS Lösungen für t und s, setzt man eine der beiden Lösungen in die entsprechende Gleichung ein um die Koordinaten des Schnittpunktes zu bestimmen.

c) Hat das LGS keine Lösung, so gibt es auch keine gemeinsamen Punkte.

♠ ♠ ♠ Gruppe Pik — Lösungen ♠ ♠ ♠

a)



Man kann die Koordinaten des Schnittpunktes S(4 | 2) ablesen.

Rechnerisch: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

GTR: $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$ s od. t einges.: S(4 | 2).

b) $\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

GTR: $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 18 \\ -1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & -25 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow t = 5 \\ \longrightarrow s = -8 \\ \text{S}(1 \mid -5 \mid 25) \end{array}$

c) Da die letzte Zeile in der Matrix nach dem rref $0 = 1$ lautet, hat das LGS keine Lösung. g und h haben keinen Schnittpunkt.