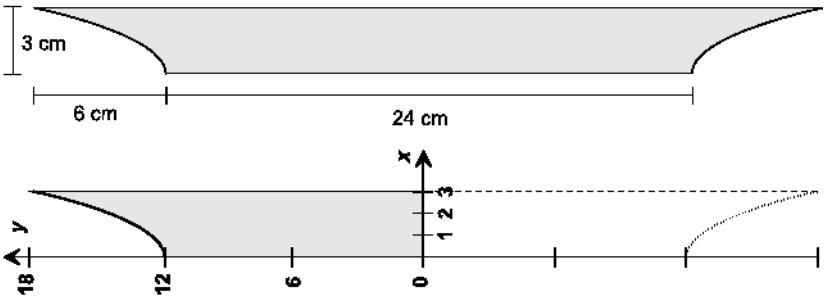
Aufgabe 1:



In der Abbildung oben ist der Querschnitt eines runden Tellers mit den genauen Maßen in cm dargestellt. Es soll das Fassungsvolumen des Tellers berechnet werden. Dazu wird ein Koordinatensystem wie darunter abgebildet eingeführt (drehe das Blatt um $-90°$).

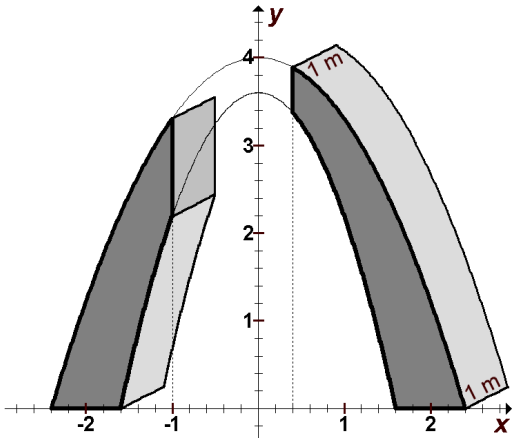
Das Volumen des Tellers ergibt sich durch Rotationder in der unteren Abbildung grau gefärbten Fläche.

a) Bestimme die Parameter a und c der Randfunktion mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + c$ und berechne das Volumen des Rotationskörpers in Liter.

b) Wie hoch steht die Suppe im Teller, wenn dieser genau halb voll ist? (Falls keine Ergebnisse aus Teil a vorliegen: Löse die Gleichung $\frac{4}{45}u^5 + \frac{16}{3}u^3 + 144u = 298,8$ mit dem GTR)

Aufgabe 2:

Das neue Kollegslogo soll als Skulptur aus zwei Bogen auf der Wiese vor dem Haupteingang errichtet werden. Um die Skulptur auch im Mathematikunterricht verwenden zu können, sind die gekrümmten Linien y-achsensymmetrische Parabeln 2. Ordnung. Die Längeneinheit des Koordinatensystems, in dem die Vorderflächen liegen, beträgt 1 m.



a) Ermittle an Hand der nebenstehenden Abbildung die Gleichungen der Parabeln. Ein ausführlicher Rechenweg muss angegeben werden.

Zwischenergebnis: $f(x) = -\frac{25}{36}x^2 + 4$

$g(x) = -\frac{45}{32}x^2 + \frac{18}{5}$

b) Berechne die dunkelgrau dargestellte Vorderfläche **eines der beiden** Bogen. Die Skulptur soll aus Beton gefertigt werden und 1 m breit sein. Berechne die Masse eines der beiden Bogen (1 dm^3 Beton wiegt 2,4 kg).

Aufgabe 3:

Für unseren Pausenhof sollen Relax-Liegen aus Beton angeschafft werden. Die in *Abbildung 3* dunkler dargestellte Seitenfläche ist begrenzt durch die Schaubilder

$y = -2x^3 + 4,5x^2 - 3x + 0,9;$

$y = -4,5x + 0,9$

und die x-Achse. Die Längeneinheit beträgt 1 m.

a) Berechne den Flächeninhalt einer Seitenfläche.

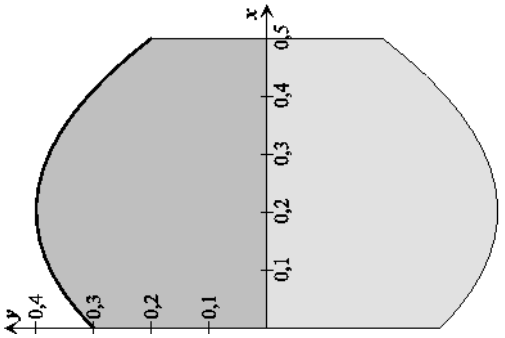
b) Eine Liege soll 60 cm breit sein. Wie schwer ist eine Liege, wenn 1 dm^3 Beton 2,4 kg wiegt?

(c) Berechne den Flächeninhalt der Liegefläche.

Aufgabe 4:

Gegeben: $f(x) = (50x^3 - 245x^2 + 92x + 27) : 90$

Wenn St. Nikolaus seinen Geschenke-Sack auf den Boden stellt, hat er annähernd die Form, die entsteht, wenn die nebenstehend dunkelgrau dargestellte Fläche um die x-Achse rotiert (drehe dazu das Blatt um 90° nach rechts). Die Randfunktion der Fläche ist gegeben durch die Funktion f. Die Längeneinheit in x- und y-Richtung beträgt 1 m.



a) Wie groß ist der mittlere Durchmesser des Nikolaussacks?

b) Berechne das Volumen des Nikolaussacks. Welche Masse hat er, wenn ein Liter des Inhaltes durchschnittlich 400 g wiegt?

Aufgabe 1:

a) $f(x) = ax^2 + c$. Das Schaubild geht durch den Punkt A(0 | 12) $\Longrightarrow$ $c = 12$
Das Schaubild geht durch den Punkt B(3 | 18) $\Longrightarrow$ $f(3) = 9a + 12 = 18$.
Dies ist erfüllt, falls $a = \frac{2}{3}$.
Also gilt $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 12$.

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left(\tfrac{2}{3}x^2 + 12\right)^2 dx \overset{\text{GTR}}{=} 597,6\pi$$

Das Fassungsvermögen des Tellers beträgt also ca. 1877,4 cm^3. Es passen also maximal ca. 1,88 l Suppe in den Teller.

b) Der Teller ist halb gefüllt, wenn die Häfte des Fassungsvermögens im Teller ist.

Dies ist der Fall, wenn die Gleichung $\pi \cdot \int_0^h \left(\frac{2}{3}x^2 + 12\right)^2 dx = 298,8\pi$ gilt. Berechnung des Integrals:

$$\int_0^h \left(\tfrac{4}{9}x^4 + 16x^2 + 144\right) dx = \left[\tfrac{4}{45}x^5 + \tfrac{16}{3}x^3 + 144x\right]_0^h = \tfrac{4}{45}h^5 + \tfrac{16}{3}h^3 + 144h$$

Die Gleichung $\frac{4}{45}h^5 + \frac{16}{3}h^3 + 144h = 298,8$ löst man folgendermaßen mit dem GTR:
Für $Y_1 = \frac{4}{45}x^5 + \frac{16}{3}x^3 + 144x - 298,8$ wird die Nullstelle berechnet auf $[0; 3]$. Ergebnis: $x = 1,842$
Bei halber Füllung steht die Suppe also 1,842 cm hoch im Teller.

Aufgabe 2:

a) $f(x) = ax^2 + c \quad f(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 4 \quad f(2,4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5,76a + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{25}{36}$

$g(x) = bx^2 + d \quad g(0) = 3,6 \quad \Longrightarrow \quad d = 3,6 \quad g(1,6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2,56b + 3,6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{45}{32}$

Also gilt $f(x) = -\frac{25}{36}x^2 + 4$ (äußere Parabel) und $g(x) = -\frac{45}{32}x^2 + \frac{18}{5}$ (innere Parabel).

b) Linker Bogen: $A = \int_{-2,4}^{-1,6} f(x)\,dx + \int_{-1,6}^{-1} (f(x) - g(x))\,dx \overset{\text{GTR}}{\approx} 0,948 + 0,975 = 1,923$

Die Vorderfläche des linken Bogens hat einen Flächeninhalt von 1,923 m^2.
$V = A \cdot h = 1,923\ \text{m}^2 \cdot 1\ \text{m} = 1,923\ \text{m}^3 = 1923\ \text{dm}^3$ $\qquad m = 1923\ \text{dm}^3 \cdot 2,4\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 4614,6\ \text{kg}$.
Der linke Bogen wiegt also ca. 4,615 t.

Rechter Bogen: $A = \int_{0,4}^{1,6} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{1,6}^{2,4} f(x)\,dx \overset{\text{GTR}}{\approx} 1,437 + 0,948 = 2,385$

Die Vorderfläche des rechten Bogens hat einen Flächeninhalt von 2,385 m^2.
$V = A \cdot h = 2,385\ \text{m}^2 \cdot 1\ \text{m} = 2,385\ \text{m}^3 = 2385\ \text{dm}^3$ $\qquad m = 2385\ \text{dm}^3 \cdot 2,4\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 5723,6\ \text{kg}$.
Der rechte Bogen wiegt also ca. 5,724 t.

Aufgabe 3:

a) Berechnung der Nullstelle der oberen Randfunktion Y_1 auf $[0; 1,5]$ mit dem GTR:
$x = 1,414$ (abgespeichert als a). Die Gerade Y_2 schneidet die x-Achse an der Stelle 0,2.

$$A = \int_0^a Y_1(x)\,dx - \tfrac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,9 \overset{\text{GTR}}{\approx} 0,515 - 0,09 = 0,425$$

Die Seitenfläche der Liege hat einen Flächeninhalt von 0,425 m^2.

b) $V = A \cdot h = 0,425\ \text{m}^2 \cdot 0,6\ \text{m} = 0,255\ \text{m}^3 = 255\ \text{dm}^3$ $\qquad m = 255\ \text{dm}^3 \cdot 2,4\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 612,6\ \text{kg}$.
(Mit den genauen Zahlenwerten gerechnet!). Eine Liege wiegt also ca. 613 kg.

Aufgabe 4:

a) Mittlerer Durchmesser (doppelter Radius) $d = 2 \cdot \dfrac{1}{0,5 - 0} \int_0^{0,5} f(x)dx\ \text{m} \overset{\text{GTR}}{\approx} 2 \cdot 2 \cdot 0,173\ \text{m} = 0,692\ \text{m}$

b) $V = \pi \cdot \int_0^{0,5} (f(x))^2\,dx\ \text{m} \overset{\text{GTR}}{\approx} 0,0613\pi \approx 0,1925$ $\qquad 0,1925\ \text{m}^3 = 192,5\ \text{dm}^3$

Das Volumen des Sacks beträgt 192,5 l. Der Nikolaussack hat also eine Masse von 77 kg.