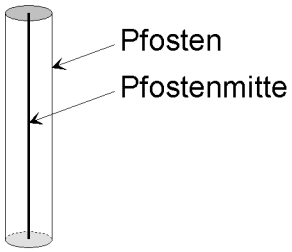
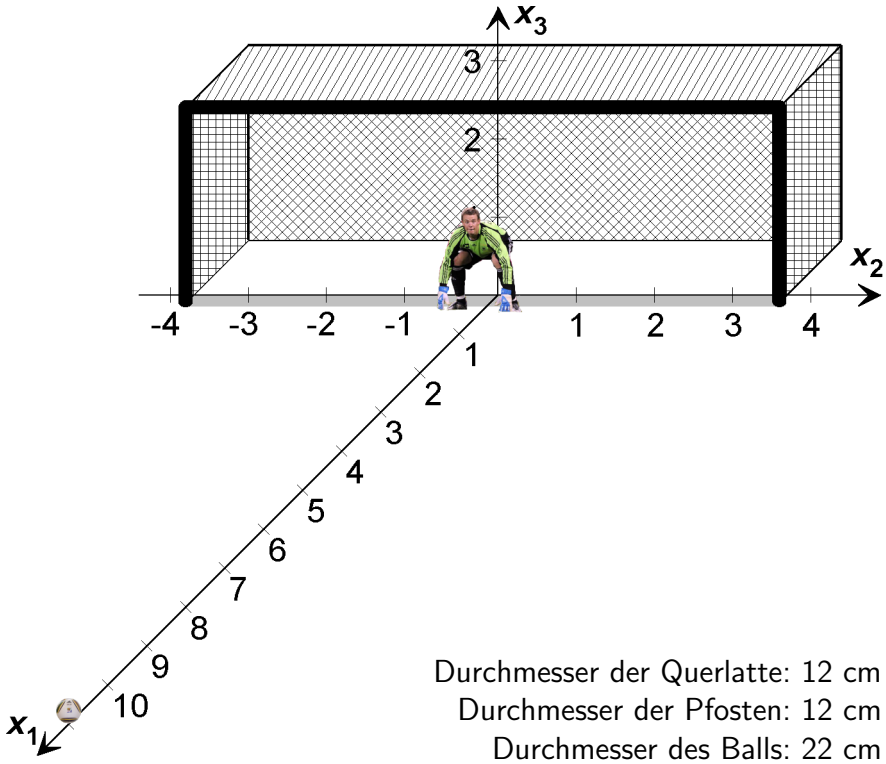
Fußball-WM 2010





Durchmesser der Querlatte: 12 cm
Durchmesser der Pfosten: 12 cm
Durchmesser des Balls: 22 cm

Die Abbildung zeigt ein Fußballtor in einem Koordinatensystem mit Längeneinheit 1 m. Der Stützpunkt der Geraden entlang der Lattenmitte ist $L(0,06 \mid 0 \mid 2,5)$ und die Stützpunkte der Geraden entlang der Pfostenmitten sind $P_1(0,06 \mid 3,72 \mid 0)$ bzw. $P_2(0,06 \mid -3,72 \mid 0)$.
Pfosten, Latte und Torlinie haben einen Durchmesser bzw. eine Breite von 12 cm, so dass die x_2-Achse die Hinterkante der Torlinie darstellt, die der Ball laut FIFA-Regeln **vollständig** überqueren muss. Der Ball hat einen Radius von 11cm.

a) Beim Achtelfinalspiel zwischen England und Deutschland schoss in der 40. Spielminute der Engländer Lampard den Ball so gegen die Unterkante der Latte, dass er von dort ins Tor abprallte. Der Ballmittelpunkt bewegte sich dabei auf der Geraden

$$\text{l:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 22,9 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Bestimme den Punkt A, in dem der Ball auf dem Boden aufgekommen ist. Handelte sich dabei um ein reguläres Tor (das nicht gegeben wurde)?
(Tipp: Der Ball kommt genau dann auf dem Boden auf, wenn sich dessen Mittelpunkt 11 cm über dem Boden befindet.)

b) Samstag, 3. Juli 2010, 18.30 Uhr: Viertelfinale Argentinien gegen Deutschland:
Es steht 1:1 nach der Verlängerung und es kommt zum Elfemeterschießen. Messi schießt den Ball (genauer gesagt: den Mittelpunkt des Balls) vom Punkt $E(11 \mid 0 \mid 0,11)$ geradlinig Richtung Punkt $R(-1 \mid 1,9 \mid 2)$. Neuer hält den Schuss sicher, wenn die Flugbahn weniger als 2,5 m vom Punkt $N(0,2 \mid 0 \mid 0)$ entfernt ist. Erzielt Messi das 2:1?

c) Danach drischt Özil den Ballmittelpunkt entlang der Geraden

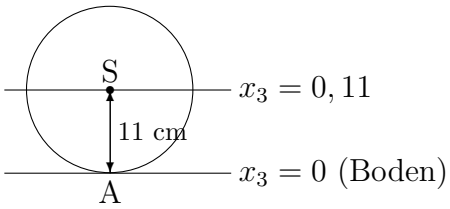
$$\text{ö:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0,11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -55 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

ins rechte obere Eck. Trifft Özil das Tor, ohne dass der Ball den Pfosten oder die Latte berührt?

Ralph Schwörer, Stegen

a) Hier muss der Schnittpunkt der Geraden l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 22,9 \end{pmatrix}$ mit der Ebene

E_1: $x_3 = 0,11$ bestimmt werden. Man erhält
$$\begin{aligned} 2,4 + 22,9t &= 0,11 \\ 22,9t &= -2,29 \\ t &= -0,1 \end{aligned}$$



$t = -0,1$ in l eingesetzt ergibt den Schnittpunkt $S(-0,4 \mid -0,5 \mid 0,11)$. Der Ball kam also im Punkt $A(-0,4 \mid -0,5 \mid 0)$ auf dem Boden auf. Dieser befindet sich 40 cm hinter der Torlinie, so dass es sich um ein reguläres Tor handelte, das der Englischen Mannschaft zu Unrecht aberkannt wurde.

b) Der Mittelpunkt des Balls bewegt sich auf der Geraden m: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0,11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 1,9 \\ 1,89 \end{pmatrix}$.

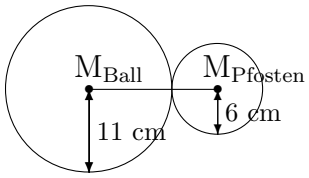
Zu berechnen ist nun der Abstand des Punktes $N(0,2 \mid 0 \mid 0)$ von der Geraden m. Dies kann durch Aufstellen einer zu m orthogonalen Hilfsebene durch N erreicht werden.

Variante mit Verwendung des GTR: Betrachtet man einen beliebigen Punkt X_t der Geraden m, so gilt für dessen Abstand zum Punkt N:

$$d(t) = \left|\overrightarrow{NX_t}\right| = \left| \begin{pmatrix} 11 - 12t \\ 1,9t \\ 0,11 + 1,89t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \sqrt{(10,8 - 12t)^2 + (1,9t)^2 + (0,11 + 1,89t)^2}$$

Das Minimum des Abstandes $d(t)$ kann man mit dem GTR berechnen und man erhält $d_{min} \approx 2,431 < 2,5$. NEUER hält also den ersten Elfmeter und es bleibt beim 1:1.

c)



Der Ball berührt genau z.B. den Pfosten, wenn der Mittelpunkt des Balls von einem Punkt der Geraden entlang der Pfostenmitte genau 17 cm entfernt ist. Ist also der kleinste Abstand der Geraden des Ballmittelpunktes und der Pfostenmitte kleiner oder gleich 17 cm, so fliegt der Ball gegen den Pfosten.

Zu berechnen ist hier also der Abstand der windschiefen Geraden des Ballmittelpunkts ö und der Mitte des rechten Pfostens p_1 bzw. der Mitte der Querlatte q.

ö: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0,11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -55 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}$ Pfostenmitte rechts p_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 3,72 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu beiden Richtungsvektoren orthogonaler Vektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -55 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 55 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d(\text{ö}, p_1) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10,94 \\ -3,72 \\ 0,11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 55 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{17^2 + 55^2}} = \frac{|-18,62|}{\sqrt{3314}} \approx 0,323 > 0,17$$

Für die Querlatte q: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d(\text{ö}, q) = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 10,94 \\ 0 \\ -2,39 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -55 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{11^2 + 55^2}} \approx 0,198$

Beide Abstände sind größer als 17 cm. Der Ball berührt also weder Pfosten noch Latte. Er fliegt ins Tor, weil ö die x_2-x_3-Ebene in $Ö(0 \mid 3,4 \mid 2,31)$ schneidet — unhaltbar.